Fachbereich Mathematik/Informatik **27. März 2012**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik für Anwender I

Klausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Ich erkläre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	3	5	4	5	6	4	4	3	4	4	4	4	6	64
erhaltene Pkt.:																

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *injektive* Abbildung
$$f : M \longrightarrow N.$$
(2) Eine *surjektive* Abbildung
$$f : M \longrightarrow N.$$
(3) Die *Dimension* eines K-Vektorraums V (V besitze ein endliches Erzeugendensystem).
(4) Der *Kern* einer linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
(5) Der *Limes* (oder *Grenzwert*) einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(6) Die *Stetigkeit* einer Abbildung
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
(7) Die *eulersche Zahl e*.
(8) Eine *lineare inhomogene* gewöhnliche Differentialgleichung.

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Das *Injektivitätskriterium für lineare Abbildungen.*
(2) Das *Leibnizkriterium für alternierende Reihen.*
(3) Der *Mittelwertsatz der Differentialrechnung.*
(4) Die *Stammfunktion der Umkehrfunktion.*

AUFGABE 3. (3 Punkte)

Zwei Personen, A und B, liegen unter einer Palme, A besitzt 2 Fladenbrote und B besitzt 3 Fladenbrote. Eine dritte Person C kommt hinzu, die kein Fladenbrot besitzt, aber 5 Taler. Die drei Personen werden sich einig, für die 5 Taler die Fladenbrote untereinander gleichmäßig aufzuteilen. Wie viele Taler gibt C an A und an B?

AUFGABE 4. (5 Punkte)

Zeige durch Induktion über n, dass es zu natürlichen Zahlen a, n mit $a > 0$ natürliche Zahlen q, r mit $r < a$ und mit
$$n = aq + r$$
gibt.

Aufgabe 5. (4 Punkte)
Es seien die beiden komplexen Polynome

$$P = X^3 - 2iX^2 + 4X - 1 \text{ und } Q = iX - 3 + 2i$$

gegeben. Berechne $P(Q)$ (es soll also Q in P eingesetzt werden).

Aufgabe 6. (5 Punkte)
Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

die durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (bezüglich der Standardbasis) festgelegte lineare Abbildung. Bestimme die beschreibende Matrix zu φ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7. (6 (2+4) Punkte)
Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung.

a) Zeige, dass der Kern von φ ein Untervektorraum von V ist.

b) Beweise das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Aufgabe 8. (4 (2+2) Punkte)

a) Bestimme, ob die komplexe Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2+5i & 1-2i \\ 3-4i & 6-2i \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

b) Finde eine Lösung für das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54+72i \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{3\sin^4 n - 7n^3 + 11n}{5n^3 - 4n^2 - \cos n}$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \frac{\ln(2x^2)}{7^x}.$$

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t) = t^2 e^{-t}.$$

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = e^{x^2} - x$$

im Entwicklungspunkt $a = 1$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 1 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion von $\sin^3 x$.

Aufgabe 14. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{x^3 + x}{x^2 - 1}$$

für $x > 1$.

Aufgabe 15. (6 (4+2) Punkte)

a) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{t^3}{y^2},\ y > 0,\ t > 0\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

b) Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{t^3}{y^2} \text{ mit } y(1) = 1\,.$$