

## Einführung in die mathematische Logik

### Vorlesung 4

#### Die Ableitungsbeziehung

DEFINITION 4.1. Es sei  $\Gamma \subseteq L^V$  eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagevariablenmenge  $V$  und sei  $\alpha \in L^V$ . Man sagt, dass  $\alpha$  aus  $\Gamma$  *ableitbar* ist, geschrieben

$$\Gamma \vdash \alpha,$$

wenn es endlich viele Ausdrücke  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Gamma$  derart gibt, dass

$$\vdash \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha$$

gilt.

Die vorgegebene Ausdrucksmenge kann endlich oder unendlich sein, in der Ableitungsbeziehung kommen aber stets nur endlich viele Ausdrücke aus  $\Gamma$  vor (eine „unendliche Konjunktion“ ist gar nicht definiert). Die Menge der aus einer gegebenen Ausdrucksmenge  $\Gamma$  ableitbaren Ausdrücke bezeichnet man mit  $\Gamma^\vdash$ , also

$$\Gamma^\vdash = \{\alpha \in L^V \mid \Gamma \vdash \alpha\}.$$

Wegen  $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$  gilt  $\Gamma \subseteq \Gamma^\vdash$ . Bei  $\Gamma = \Gamma^\vdash$  sagt man, dass  $\Gamma$  abgeschlossen unter Ableitungen ist. Die aus der leeren Menge ableitbaren Ausdrücke sind gerade die (syntaktischen) Tautologien.

Aus den (Grund- oder abgeleiteten) Tautologien ergeben sich direkt Regeln für die Ableitungsbeziehung.

LEMMA 4.2. *Es sei  $\Gamma \subseteq L^V$  eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagevariablenmenge  $V$ . Dann gelten folgende Regeln für die Ableitungsbeziehung (dabei seien  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_i$  Aussagen).*

- (1) *Modus Ponens: Wenn  $\Gamma \vdash \alpha$  und  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , dann ist auch  $\Gamma \vdash \beta$ .*
- (2) *Wenn  $\Gamma \vdash \alpha$ , so auch  $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha$ .*
- (3) *Konjunktionsregel:  $\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta$  genau dann, wenn  $\Gamma \vdash \alpha$  und  $\Gamma \vdash \beta$ .*
- (4) *Wenn  $\Gamma \vdash \alpha_1, \dots, \Gamma \vdash \alpha_n$  und  $\Gamma \vdash \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ , dann auch  $\Gamma \vdash \beta$ .*
- (5) *Kettenschlussregel: Wenn  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$  und  $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$ , dann auch  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$ .*
- (6) *Widerspruchsregel: Wenn  $\Gamma \vdash \alpha$  und  $\Gamma \vdash \neg\alpha$ , dann auch  $\Gamma \vdash \beta$ .*
- (7) *Fallunterscheidungsregel: Wenn  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$  und  $\Gamma \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$ , dann auch  $\Gamma \vdash \beta$ .*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 4.3. □

DEFINITION 4.3. Eine Ausdrucksmenge  $\Gamma \subseteq L^V$  in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagevariablenmenge  $V$  heißt *widersprüchlich*, wenn es einen Ausdruck  $\alpha \in L^V$  mit  $\Gamma \vdash \alpha$  und  $\Gamma \vdash \neg\alpha$  gibt. Eine nicht widersprüchliche Ausdrucksmenge heißt *widerspruchsfrei*.

### Der Vollständigkeitsatz der Aussagenlogik I

Wir zeigen, dass für die Aussagenlogik die Ableitbarkeitsbeziehung mit der Folgerungsbeziehung übereinstimmt. Im Beweisaufbau orientieren wir uns an dem Vollständigkeitsatz für die Prädikatenlogik, der deutlich schwieriger ist und der später folgen wird.

DEFINITION 4.4. Eine Teilmenge  $\Gamma \subseteq L^V$  zu einer Menge  $V$  an Aussagevariablen heißt *maximal widerspruchsfrei*, wenn  $\Gamma$  widerspruchsfrei ist und jede echt größere Menge  $\Gamma \subset \Gamma'$  widersprüchlich ist.

LEMMA 4.5. *Es sei  $L^V$  die Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagevariablenmenge  $V$  und es sei  $\lambda$  eine Wahrheitsbelegung der Variablen mit zugehöriger Interpretation  $I$ . Dann ist  $I^{\models}$  maximal widerspruchsfrei.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 4.6. □

LEMMA 4.6. *Es sei  $V$  eine Menge an Aussagevariablen und  $\Gamma \subseteq L^V$  eine maximal widerspruchsfreie Teilmenge der zugehörigen Sprache der Aussagenlogik. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) Für jedes  $\alpha \in L^V$  ist entweder  $\alpha \in \Gamma$  oder  $\neg\alpha \in \Gamma$ .
- (2) Aus  $\Gamma \vdash \alpha$  folgt  $\alpha \in \Gamma$ .
- (3) Es ist  $\alpha \wedge \beta \in \Gamma$  genau dann, wenn  $\alpha \in \Gamma$  und  $\beta \in \Gamma$ .
- (4) Es ist  $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$  genau dann, wenn  $\alpha \notin \Gamma$  oder  $\beta \in \Gamma$ .
- (5) Es ist<sup>1</sup>  $\alpha \vee \beta \in \Gamma$  genau dann, wenn  $\alpha \in \Gamma$  oder  $\beta \in \Gamma$ .

*Beweis.* (1). Wegen der Widerspruchsfreiheit können nicht sowohl  $\alpha$  als auch  $\neg\alpha$  zu  $\Gamma$  gehören. Wenn weder  $\alpha$  noch  $\neg\alpha$  zu  $\Gamma$  gehören, so ist entweder  $\Gamma \cup \{\alpha\}$  oder  $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$  widerspruchsfrei. Wären nämlich beide widersprüchlich, so würde für einen beliebigen Ausdruck  $\beta$  sowohl

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$$

als auch

$$\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$$

gelten. Dies bedeutet nach Aufgabe 4.4

$$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

---

<sup>1</sup>Das Symbol  $\vee$  kommt in unserem gewählten axiomatischen Aufbau der Sprache nicht vor und ist als Abkürzung zu verstehen, nämlich  $\alpha \vee \beta = \neg\alpha \rightarrow \beta$ .

und

$$\Gamma \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta,$$

woraus aufgrund der Fallunterscheidungsregel

$$\Gamma \vdash \beta$$

folgt. Dies bedeutet aber, dass  $\Gamma$  widersprüchlich ist. (2). Sei  $\Gamma \vdash \alpha$ . Nach (1) ist  $\alpha \in \Gamma$  oder  $\neg\alpha \in \Gamma$ . Das zweite kann nicht sein, da sich daraus sofort ein Widerspruch ergeben würde. Also ist  $\alpha \in \Gamma$ . (3) folgt aus (2) und der Konjunktionsregel. (4). Aufgrund von (1) müssen wir die Äquivalenz  $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \in \Gamma$  genau dann, wenn  $\alpha \in \Gamma$  und  $\neg\beta \in \Gamma$  zeigen. Dies ergibt sich aus (3). (5) folgt ähnlich wie (4).  $\square$

**LEMMA 4.7.** *Es sei  $\Gamma \subseteq L^V$  eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagevariablenmenge  $V$ . Es sei  $\Gamma$  widerspruchsfrei, abgeschlossen unter Ableitungen und für jede Aussagevariable  $p \in V$  gelte  $p \in \Gamma$  oder  $\neg p \in \Gamma$ . Dann ist  $\Gamma$  maximal widerspruchsfrei.*

*Beweis.* Wir zeigen durch Induktion über den Aufbau der Sprache, dass für jedes  $\alpha \in L^V$  die Alternative  $\alpha \in \Gamma$  oder  $\neg\alpha \in \Gamma$  gilt. Daraus folgt die maximale Widerspruchsfreiheit. Für  $\alpha = p$  eine Aussagevariable ist dies Teil der Voraussetzung. Bei  $\alpha = \neg\beta$  folgt wegen  $\neg(\neg\beta) \leftrightarrow \beta$  die Aussage aus der Induktionsvoraussetzung, da  $\Gamma$  abgeschlossen unter Ableitungen ist. Sei nun  $\alpha = \beta \wedge \gamma$ . Bei  $\beta \in \Gamma$  und  $\gamma \in \Gamma$  ist wegen der Ableitungsabgeschlossenheit auch  $\beta \wedge \gamma \in \Gamma$ . Wenn hingegen  $\beta \notin \Gamma$  ist, so folgt nach Induktionsvoraussetzung  $\neg\beta \in \Gamma$ . Aufgrund der Tautologie  $\vdash \neg\beta \rightarrow \neg(\beta \wedge \gamma)$  ergibt sich  $\neg\alpha = \neg(\beta \wedge \gamma) \in \Gamma$ . Der Beweis für die Implikation verläuft ähnlich.  $\square$

Oben haben wir gesehen, dass Interpretationen maximal widerspruchsfreie Ausdrucksmengen liefern. Davon gilt auch die Umkehrung.

**LEMMA 4.8.** *Es sei  $V$  eine Menge an Aussagevariablen und  $\Gamma \subseteq L^V$  eine maximal widerspruchsfreie Teilmenge der zugehörigen Sprache der Aussagenlogik. Dann ist  $\Gamma$  erfüllbar.*

*Beweis.* Da  $\Gamma$  maximal widerspruchsfrei ist, gilt nach Lemma 4.6 (1) für jede Aussagevariable die Alternative  $p \in \Gamma$  oder  $\neg p \in \Gamma$ . Wir betrachten die Wahrheitsbelegung

$$\lambda(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \in \Gamma, \\ 0 & \text{falls } \neg p \in \Gamma. \end{cases}$$

Wir behaupten

$$I^\# = \Gamma,$$

was wir über den Aufbau der Sprache beweisen. Der Induktionsanfang ist durch die gewählte Belegung gesichert, der Induktionsschritt folgt aus Lemma 4.6.  $\square$

## Auffüllungsstrategien

Wir wollen zeigen, dass jede widerspruchsfreie Ausdrucksmenge erfüllbar ist. Die Strategie ist hierbei, sie zu einer maximal widerspruchsfreien Ausdrucksmenge aufzufüllen und dann die vorstehende Aussage anzuwenden. Wir unterscheiden die beiden Fälle, wo die Aussagevariablenmenge abzählbar ist und den allgemeinen Fall einer beliebigen Aussagevariablenmenge. Letzteres erfordert stärkere mengentheoretische Hilfsmittel, nämlich das Lemma von Zorn.

**LEMMA 4.9.** *Es sei  $V$  eine abzählbare Menge an Aussagevariablen und  $\Gamma \subseteq L^V$  eine widerspruchsfreie Teilmenge der zugehörigen Sprache der Aussagenlogik. Dann kann man  $\Gamma$  durch sukzessive Hinzunahme von entweder  $p_n$  oder  $\neg p_n$  und durch Abschluss unter der Ableitungsbeziehung zu einer maximal widerspruchsfreien Teilmenge  $\Gamma' \supseteq \Gamma$  ergänzen.*

*Beweis.* Es sei  $p_n, n \in \mathbb{N}_+$ , eine (surjektive, aber nicht notwendigerweise injektive) Aufzählung der Aussagevariablen. Die Voraussetzung bedeutet, dass  $\Gamma_0 := \Gamma^\vdash$  keinen Widerspruch enthält. Wir konstruieren eine (endliche oder abzählbar unendliche) Folge von aufsteigenden widerspruchsfreien Teilmengen  $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$ , wobei in  $\Gamma_n$  für jede Variable  $p_i, 1 \leq i \leq n$ , die Alternative entweder  $p_i \in \Gamma_n$  oder  $\neg p_i \in \Gamma_n$  gilt. Das Konstruktionsverfahren und diese Aussage beweisen wir durch Induktion über  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $\Gamma_0$  ist dies richtig. Sei  $\Gamma_n$  schon konstruiert. Bei  $p_{n+1} \in \Gamma_n$  oder  $\neg p_{n+1} \in \Gamma_n$  setzen wir

$$\Gamma_{n+1} := \Gamma_n.$$

Wegen der Widerspruchsfreiheit von  $\Gamma_n$  können nicht sowohl  $p_{n+1}$  als auch  $\neg p_{n+1}$  zu  $\Gamma_n$  gehören. Wenn weder  $p_{n+1}$  noch  $\neg p_{n+1}$  zu  $\Gamma_n$  gehören, so setzen wir

$$\Gamma_{n+1} := (\Gamma_n \cup p_{n+1})^\vdash$$

(man könnte genauso gut  $\neg p_{n+1}$  hinzunehmen). Nach Konstruktion ist  $\Gamma_{n+1}$  abgeschlossen unter der Ableitungsbeziehung und erfüllt die (Oder)-Alternative für alle Variablen  $p_i, i \leq n+1$ . Wenn  $\Gamma_{n+1}$  widersprüchlich wäre, so gelte insbesondere  $\Gamma_n \cup \{p_{n+1}\} \vdash \neg p_{n+1}$ . Dann würde aber auch  $\Gamma_n \vdash p_{n+1} \rightarrow \neg p_{n+1}$  gelten und somit nach der Fallunterscheidungsregel auch  $\Gamma_n \vdash \neg p_{n+1}$ , also  $\neg p_{n+1} \in \Gamma_n$  im Widerspruch zu dem Fall, in dem wir uns befinden. Daher liegt für die Aussagevariablen auch die Entweder-Oder-Alternative vor.

Mit dieser induktiven Definition setzen wir

$$\Gamma' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n.$$

Diese Menge  $\Gamma'$  ist widerspruchsfrei, da andernfalls schon eines der  $\Gamma_n$  einen Widerspruch enthalten würde, und auch abgeschlossen unter Ableitungen, da dies für die einzelnen  $\Gamma_n$  gilt und eine Ableitung nur endlich viele Voraussetzungen besitzt. Ferner gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Alternative  $p_n \in \Gamma'$  oder

$\neg p_n \in \Gamma'$ . Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 4.7 erfüllt und  $\Gamma'$  ist maximal widerspruchsfrei.  $\square$

BEISPIEL 4.10. Wir betrachten die Aussagevariablenmenge  $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$  und die Ausdrucksmenge

$$\Gamma = \{p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, p_3 \rightarrow p_4, \dots\}.$$

Diese wollen wir zu einer maximal widerspruchsfreien Menge gemäß Lemma 4.9 ergänzen. Wenn wir im ersten Schritt  $p_1$  hinzunehmen, so ergibt sich sukzessive  $p_i \in \Gamma_1$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Es ist dann  $\Gamma_1$  schon maximal widerspruchsfrei. Wählt man hingegen im ersten Schritt  $\neg p_1$ , so gehört weder  $p_2$  noch  $\neg p_2$  zu  $\Gamma_1$ . Beim zweiten Schritt hat man dann die Freiheit, ob man  $p_2$  oder  $\neg p_2$  zur Definition von  $\Gamma_2$  hinzunimmt, und so weiter.