Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 8

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein Element mit dem (nach Lemma 5.5) zugehörigen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow G,\, n \longmapsto g^n.$$

Beschreibe die kanonische Faktorisierung von φ gemäß Satz 8.3.

Aufgabe 2. Zeige mit Hilfe der Homomorphiesätze, dass zyklische Gruppen mit der gleichen Ordnung isomorph sind.

Aufgabe 3. Seien G, H und F Gruppen und seien $\varphi : G \longrightarrow H$ und $\psi : G \longrightarrow F$ Gruppenhomomorphismen mit ψ surjektiv und mit $\ker \psi \subseteq \ker \varphi$. Bestimme den Kern des induzierten Homomorphismus

$$\tilde{\varphi} : F \longrightarrow H.$$

Aufgabe 4. Sei p eine Primzahl. Definiere einen Gruppenhomomorphismus

$$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, 0),$$

der $p \mapsto 1$ und alle anderen Primzahlen auf null schickt.

Aufgabe 5. Berechne für die Permutation σ mit

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma(P)$	7	10	3	9	5	2	4	1	8	6

die Potenzen σ^2 und σ^3 und gebe die Zyklendarstellung für diese drei Permutationen an.

Aufgabe 6. Sei M eine Menge und sei $\sigma : M \longrightarrow M$ eine Permutation. Definiere auf M die Relation R durch

$$xRy \text{ genau dann, wenn es ein } n \in \mathbb{Z} \text{ gibt mit } y = \sigma^n(x)\,.$$

Zeige, dass R eine Äquivalenzrelation auf M ist. Wie sieht es aus, wenn man nur $n \in \mathbb{N}$ zulässt, und wie, wenn M endlich ist.

AUFGABE 7. (3 Punkte)

Bestimme die Gruppenhomomorphismen zwischen zwei zyklischen Gruppen. Welche sind injektiv und welche sind surjektiv?

AUFGABE 8. (2 Punkte)

Bestimme sämtliche Gruppen mit vier Elementen.

In der folgenden Aufgabe wird das *Zentrum* einer Gruppe verwendet.

Sei G eine Gruppe. Das *Zentrum* $Z = Z(G)$ von G ist die Teilmenge

$$Z = \{g \in G : \, gx = xg \text{ für alle } x \in G\}\,.$$

AUFGABE 9. (3 Punkte)

Sei G eine Gruppe. Zeige, dass das Zentrum $Z \subseteq G$ ein Normalteiler in G ist. Man bringe das Zentrum in Zusammenhang mit dem Gruppenhomomorphismus

$$\kappa : G \longrightarrow \operatorname{Aut}(G),\ g \longmapsto \kappa_g.$$

Was ist das Bild von diesem Homomorphismus, und was besagen die Homomorphiesätze in dieser Situation?

AUFGABE 10. (3 Punkte)

Sei W die Gruppe der eigentlichen Bewegungen an einem Würfel. Man gebe eine möglichst lange Kette von sukzessiven Untergruppen

$$\{\mathrm{id}\} \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n = W$$

an derart, dass zwischen G_i und G_{i+1} keine weitere Untergruppe liegen kann.

AUFGABE 11. (2 Punkte)

Sei M eine Menge und sei $f : M \to M$ eine Abbildung. Zeige, dass f genau dann injektiv ist, wenn f ein Linksinverses besitzt, und dass f genau dann surjektiv ist, wenn f ein Rechtsinverses besitzt.

AUFGABE 12. (2 Punkte)

Sei M eine Menge und sei $M = \biguplus_{i \in I} M_i$ eine Partition von M, d.h. jedes M_i ist eine Teilmenge von M und M ist die disjunkte Vereinigung der M_i. Zeige, dass die Produktgruppe

$$\prod_{i \in I} \operatorname{Perm}(M_i)$$

eine Untergruppe von $\operatorname{Perm}(M)$ ist.