**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2013/2014**

# Analysis I

## Arbeitsblatt 12

### Übungsaufgaben

Aufgabe 12.1. Zeige, dass eine lineare Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto ax,$$

stetig ist.

Aufgabe 12.2. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|\,,$$

stetig ist.

Aufgabe 12.3. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto \sqrt{x},$$

stetig ist.

Die folgende Aufgabe verwendet die reelle Sinusfunktion, die wir später einführen werden. Im Moment muss man nur wissen, dass sie stetig und periodisch ist und dass sich ihre Werte zwischen $-1$ und $1$ bewegen.

Aufgabe 12.4. Zeige, dass die durch

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

definierte Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig ist. Ist der Graph dieser Funktion „zeichenbar“?

Aufgabe 12.5. Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $x \in T$ ein Punkt mit $f(x) > 0$. Zeige, dass dann auch $f(y) > 0$ für alle $y$ aus einem nichtleeren offenen Intervall $]x - a, x + a[$ gilt.

Aufgabe 12.6. Es seien $a < b < c$ reelle Zahlen und es seien

$$g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$h\colon [b, c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit $g(b) = h(b)$. Zeige, dass dann die Funktion

$$f\colon [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(t) = g(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } f(t) = h(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

AUFGABE 12.7. Bestimme, für welche Punkte $x \in \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \leq -1 \\ x^2 \text{ für } -1 < x < 2 \\ -2x + 7 \text{ für } x \geq 2 \end{cases}$$

definierte Funktion stetig ist.

AUFGABE 12.8.*

Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

nur im Nullpunkt 0 stetig ist.

AUFGABE 12.9. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine endliche Teilmenge und

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass $f$ stetig ist.

AUFGABE 12.10. Berechne den Grenzwert der Folge

$$x_n = 5\left(\frac{2n+1}{n}\right)^3 - 4\left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3$$

für $n \to \infty$.

AUFGABE 12.11. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $x \in \mathbb{R}$. Es sei

$$T = \left\{\frac{1}{n} | \, n \in \mathbb{N}_+\right\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}\,.$$

Die Funktion

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

sei durch

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = x_n \text{ und } f(0) = x$$

festgelegt. Zeige, dass $f$ genau dann stetig ist, wenn die Folge gegen $x$ konvergiert.

Die nächsten beiden Aufgaben verwenden folgende Definition.

Es seien $L$ und $M$ Mengen und es sei

$$f\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $S \subseteq L$ heißt die Abbildung

$$S \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

die *Einschränkung der Abbildung* auf die Teilmenge $S$.

Die Einschränkung wird mit $f|_S$ bezeichnet.

Aufgabe 12.12. Es seien $S \subseteq T \subseteq \mathbb{K}$ Teilmengen. Zeige, dass zu einer stetigen Funktion

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

auch die Einschränkung $f|_S$ stetig ist.

Aufgabe 12.13. Man gebe ein Beispiel für eine streng wachsende Funktion

$$f\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

derart, dass es keine (endliche) Zerlegung $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = 1$ des Intervalls $[0,1]$ gibt, so dass die Einschränkungen $f|_{]a_{i-1},a_i]}$ stetig sind.

Aufgabe 12.14. Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{K}$ ein Punkt. Es sei $f\colon T \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $b \in \mathbb{K}$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) Es ist
$$\lim_{x \to a} f(x) = b\,.$$
(2) Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in T$ mit $d(x,a) \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x),b) \leq \epsilon$ folgt.

Aufgabe 12.15. Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^3 - x^2 + x + 3}$$

im Punkt $a = -1$.

Aufgabe 12.16. Es sei

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Definiere die Begriffe „linksseitiger“ und „rechtsseitiger Grenzwert“ von $f$ in $a$ sowie den Begriff „Sprungstelle“.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.17. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$b_n = 2a_n^4 - 6a_n^3 + a_n^2 - 5a_n + 3\,,$$

definierten Folge, wobei

$$a_n = \frac{3n^3 - 5n^2 + 7}{4n^3 + 2n - 1}$$

ist.

Aufgabe 12.18. (3 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 12.19. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$a_n = \sqrt{\frac{2\sqrt{n}-3}{3\sqrt{n}-2}}$$

konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Die nächste Aufgabe verwendet den Begriff der geraden und der ungeraden Funktion.

Eine Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(-x)$$

gilt.

Eine Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = -f(-x)$$

gilt.

Aufgabe 12.20. (4 Punkte)

Zeige, dass man jede stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

als

$$f = g + h$$

mit einer stetigen geraden Funktion $g$ und einer stetigen ungeraden Funktion $h$ schreiben kann.

Aufgabe 12.21. (7 Punkte)

Zeige, dass die Menge der stetigen Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ überabzählbar ist.