

## Algebraische Kurven

### Arbeitsblatt 15

#### Aufwärmaufgaben

AUFGABE 15.1. Sei  $R$  ein kommutativer lokaler Ring. Zeige, dass  $R$  zusammenhängend ist.

AUFGABE 15.2. Sei  $R$  ein lokaler Ring mit Restekörper  $K$ . Zeige, dass  $R$  und  $K$  genau dann die gleiche Charakteristik haben, wenn  $R$  einen Körper enthält.

AUFGABE 15.3. Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $R$  eine endlich erzeugte kommutative  $K$ -Algebra. Es seien  $F_1$  und  $F_2$  zwei topologische Filter in  $K\text{-Spek}(R)$  mit  $F_1 \subseteq F_2$ . Zeige, dass es einen Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{F_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{F_2}$$

gibt.

AUFGABE 15.4. Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $R$  eine endlich erzeugte kommutative  $K$ -Algebra. Sei  $P \in K\text{-Spek}(R)$  ein Punkt. Zeige (ohne Satz 15.12 zu verwenden), dass der Halm  $\mathcal{O}_P$  ein lokaler Ring ist.

AUFGABE 15.5. Sei  $R$  ein kommutativer Ring und sei  $\mathfrak{p}$  ein Primideal. Zeige, dass  $\mathfrak{p}$  ein minimales Primideal ist genau dann, wenn die Reduktion der Lokalisierung  $R_{\mathfrak{p}}$  ein Körper ist.

AUFGABE 15.6. Sei  $R$  ein kommutativer Ring und sei  $\mathfrak{m}$  ein maximales Ideal mit Lokalisierung  $R_{\mathfrak{m}}$ . Es sei  $\mathfrak{a}$  ein Ideal, das unter der Lokalisierungsabbildung zum Kern gehört. Zeige, dass dann  $R_{\mathfrak{m}}$  auch eine Lokalisierung von  $R/\mathfrak{a}$  ist.

## AUFGABE 15.7.\*

Sei  $K$  ein Körper und  $R$  eine integrale, endlich erzeugte  $K$ -Algebra mit Quotientenkörper  $Q(R)$ . Sei  $q \in Q(R)$ . Zeige, dass die Menge

$$\{P \in K\text{-Spek}(R) \mid q \in \mathcal{O}_P\}$$

offen in  $K\text{-Spek}(R)$  ist (dabei bezeichnet  $\mathcal{O}_P$  den lokalen Ring im Punkt  $P$ ).

## AUFGABE 15.8.\*

Sei  $K$  ein Körper und seien  $R$  und  $S$  integrale, endlich erzeugte  $K$ -Algebren. Es sei

$$\varphi : R \longrightarrow S$$

ein  $K$ -Algebra-Homomorphismus und  $\mathfrak{n}$  ein maximales Ideal in  $S$  mit  $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$ . Die Abbildung induziere einen Isomorphismus  $R_{\mathfrak{m}} \rightarrow S_{\mathfrak{n}}$ . Zeige, dass es dann auch ein  $f \in R$ ,  $f \notin \mathfrak{m}$ , gibt derart, dass  $R_f \rightarrow S_{\varphi(f)}$  ein Isomorphismus ist.

AUFGABE 15.9. Betrachte  $V = V(XW - YZ) \subseteq \mathbb{A}_K^4$ . Beschreibe eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{A}_K^4$  derart, dass der zu  $U \cap V \subseteq U$  gehörende Ringhomomorphismus

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(U \cap V, \mathcal{O})$$

nicht surjektiv ist.

AUFGABE 15.10. Zeige, dass der Ring  $\Gamma(U, \mathcal{O})$  reduziert ist.

AUFGABE 15.11. Sei  $R$  eine kommutative  $K$ -Algebra von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Sei  $U \subseteq K\text{-Spek}(R)$  eine offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow K$  eine Funktion. Es sei  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine offene Überdeckung mit der Eigenschaft, dass die Einschränkungen  $f_i = f|_{U_i}$  algebraische Funktionen sind. Zeige, dass dann  $f$  selbst algebraisch ist.

AUFGABE 15.12. Sei  $K$  ein Körper und betrachte das Achsenkreuz

$$V = K\text{-Spek}(K[X, Y]/(XY)).$$

Bestimme für jeden Punkt  $P \in V$ , ob der lokale Ring an  $P$  ein Integritätsbereich ist oder nicht.

AUFGABE 15.13. Sei  $I$  eine gerichtete Indexmenge und sei  $G_i$ ,  $i \in I$ , ein gerichtetes System von kommutativen Gruppen. Zeige, dass der Kolimes eine kommutative Gruppe ist.

AUFGABE 15.14. Sei  $I$  eine gerichtete Indexmenge und sei  $M_i$ ,  $i \in I$ , ein gerichtetes System von Mengen. Es sei  $N$  eine weitere Menge und zu jedem  $i \in I$  sei eine Abbildung

$$\psi_i : M_i \longrightarrow N$$

gegeben mit der Eigenschaft, dass  $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$  ist für alle  $i \preccurlyeq j$  (wobei  $\varphi_{ij}$  die Abbildungen des Systems bezeichnen). Beweise die universelle Eigenschaft des Kolimes, nämlich, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\psi : \operatorname{colim}_{i \in I} M_i \longrightarrow N$$

gibt derart, dass  $\psi_i = \psi \circ j_i$  ist, wobei  $j_i : M_i \rightarrow \operatorname{colim}_{i \in I} M_i$  die natürlichen Abbildungen sind.

Zeige ferner, dass falls  $M_i$  eine gerichtetes System von Gruppen und falls  $N$  ebenfalls eine Gruppe ist und alle  $\psi_i$  Gruppenhomomorphismen sind, dass dann auch  $\psi$  ein Gruppenhomomorphismus ist.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 15.15. (6 Punkte)

Sei  $R$  ein kommutativer Ring und sei  $\mathfrak{p}$  ein Primideal. Dann ist der Restklassenring  $S = R/\mathfrak{p}$  ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper  $Q = Q(S)$  und  $R_{\mathfrak{p}}$  ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal  $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ . Zeige, dass eine natürliche Isomorphie

$$Q(S) \cong R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$$

vorliegt.

(Man nennt diesen Körper auch den *Restekörper* zu  $\mathfrak{p}$ ).

AUFGABE 15.16. (4 Punkte)

Sei  $K$  ein Körper und sei  $R$  eine  $K$ -Algebra von endlichem Typ. Es seien  $P_1, \dots, P_n$  endlich viele Punkte in  $X = K\text{-Spek}(R)$ . Zeige, dass der Umgebungsfiler dieser Punkte durch offene Mengen der Form  $D(f)$  erzeugt wird.

D.h. es ist zu zeigen, dass es zu  $P_1, \dots, P_n \in U$  offen stets ein  $F \in R$  gibt mit  $P_1, \dots, P_n \in D(F) \subseteq U$

AUFGABE 15.17. (4 Punkte)

Sei  $R$  eine integrale  $K$ -Algebra  $R$  von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Sei  $q \in Q = Q(R)$  ein Element im Quotientenkörper von  $R$ . Zeige, dass

$$\mathfrak{a} = \{f \in R \mid \text{es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } f^n q \in R\}$$

ein Ideal in  $R$  ist. Zeige ferner, dass  $D(\mathfrak{a}) \subseteq K\text{-Spek}(R)$  der (maximale) Definitionsbereich der algebraischen Funktion  $q$  ist.

## AUFGABE 15.18. (5 Punkte)

Sei  $K$  ein Körper, sei  $R$  eine kommutative  $K$ -Algebra von endlichem Typ und sei  $S$  ein multiplikatives System in  $R$ . Zu  $S$  definieren wir

$$F(S) = \{U \subseteq K - \text{Spek}(R) \text{ offen} : \text{es gibt } f \in S \text{ mit } D(f) \subseteq U\}.$$

Zeige, dass  $F = F(S)$  ein topologischer Filter ist. Zeige ferner, dass es einen Ringhomomorphismus

$$R_S \longrightarrow \mathcal{O}_F$$

gibt, der eine Isomorphie ist, falls  $K$  algebraisch abgeschlossen und  $R$  reduziert ist.

## AUFGABE 15.19. (5 Punkte)

Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und betrachte die affine Ebene  $\mathbb{A}_K^2$  zusammen mit der  $x$ -Achse

$$V = V(y).$$

Zeige, dass die folgende Menge ein saturiertes multiplikatives System ist.

$$S = \left\{ f \in K[X, Y] \mid \begin{array}{l} \text{In der homogenen Komponente } f_{\deg(f)} \\ \text{kommt } x^{\deg(f)} \text{ vor} \end{array} \right\}.$$

Skizziere die Nullstellenmenge von einigen Polynomen, die oder die nicht zu  $S$  gehören.

Sei  $F$  der zugehörige topologische Filter. Vergleiche  $F$  mit dem Umgebungsfilter zu  $V$  und dem generischen Filter zu  $V$ .

## AUFGABE 15.20. (4 Punkte)

Sei  $X = K - \text{Spek}(R)$  eine affine Varietät und seien  $P_1, \dots, P_n \in X$  endlich viele Punkte. Es sei  $F$  der Umgebungsfilter dieser Punkte und  $\mathcal{O}_F$  der zugehörige Halm. Zeige, dass  $\mathcal{O}_F$  genau dann ein lokaler Ring ist, wenn  $n = 1$  ist.

## AUFGABE 15.21. (4 Punkte)

Sei  $R$  ein kommutativer Ring und sei  $S \subseteq R$  ein multiplikatives System. Auf  $S$  betrachten wir folgende (partielle) Ordnung, und zwar sagen wir  $f \preceq g$ , falls  $f$  eine Potenz von  $g$  teilt. Zeige, dass die kommutativen Ringe

$$R_f, f \in S,$$

ein gerichtetes System bilden, und dass für den Kolimes gilt

$$\text{colim}_{f \in S} R_f = R_S.$$

AUFGABE 15.22. (4 Punkte)

Sei  $R$  ein kommutativer Ring und seien  $f_1, \dots, f_n \in R$  Elemente, die das Einheitsideal erzeugen. Es sei vorausgesetzt, dass die Nenneraufnahmen  $R_{f_i}$  noethersch sind für  $i = 1, \dots, n$ . Zeige, dass dann auch  $R$  noethersch ist.