

Mathematik für Anwender II**Arbeitsblatt 51****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 51.1. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, (x, y) \longmapsto (x, e^{x+y}),$$

bijektiv ist. Man gebe explizit eine Umkehrabbildung an.

AUFGABE 51.2. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x),$$

eine Funktion. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x, y + f(x)),$$

bijektiv ist. Bestimme explizit eine Umkehrabbildung.

AUFGABE 51.3. Man gebe ein Beispiel einer bijektiven differenzierbaren Abbildung

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_2$$

mit einer stetigen Umkehrabbildung ψ derart, dass ψ nicht differenzierbar ist.

AUFGABE 51.4. Definiere explizit einen Diffeomorphismus zwischen \mathbb{R}^n und einer offenen Kugel $U(0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$.

AUFGABE 51.5. Es seien

$$f_1, \dots, f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen. Betrachte die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)),$$

Zeige:

- (1) Die Abbildung f ist differenzierbar.
- (2) Das totale Differential von f in 0 ist genau dann bijektiv, wenn von sämtlichen Funktionen f_i , $i = 1, \dots, n$, die Ableitungen in 0 nicht 0 sind.

- (3) f ist genau dann auf einer offenen Umgebung von 0 bijektiv, wenn die einzelnen f_i in einer geeigneten Umgebung bijektiv sind.

AUFGABE 51.6. Bestimme die regulären Punkte der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2 y, x - \sin y).$$

Zeige, dass φ in $P = (1, 0)$ regulär ist und bestimme das totale Differential der Umkehrabbildung von $\varphi|_U$ in $\varphi(P)$, wobei U eine offene Umgebung von P sei (die nicht explizit angegeben werden muss).

AUFGABE 51.7. Seien U, V, W euklidische Vektorräume und seien $\varphi: U \longrightarrow V$ und $\psi: V \longrightarrow W$ differenzierbare Abbildungen. Es sei φ regulär in $P \in U$ und ψ regulär in $Q = \varphi(P) \in V$. Ist dann $\psi \circ \varphi$ regulär in P ? Unter welchen Voraussetzungen stimmt dies?

AUFGABE 51.8. Das komplexe Quadrieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^2,$$

kann man reell schreiben als

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, x + iy = (x, y) \longmapsto (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Untersuche φ auf reguläre Punkte. Auf welchen (möglichst großen) offenen Teilmengen ist φ umkehrbar?

AUFGABE 51.9.*

Man gebe ein Beispiel einer Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

das zeigt, dass im Satz über die (lokale) Umkehrbarkeit die Bijektivität im Allgemeinen nur auf echten Teilintervallen besteht.

AUFGABE 51.10.*

Man gebe für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine bijektive, total differenzierbare Abbildung

$$\varphi_n: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

an, für die das totale Differential in mindestens einem Punkt nicht regulär ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 51.11. (2 Punkte)

Seien U_1 und U_2 offene Mengen in euklidischen Vektorräumen V_1 und V_2 . Es sei

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_2$$

eine bijektive Abbildung, die in einem Punkt $P \in U_1$ differenzierbar sei derart, dass die Umkehrabbildung in $Q = \varphi(P)$ auch differenzierbar ist. Zeige, dass das totale Differential $(D\varphi)_P$ bijektiv ist.

AUFGABE 51.12. (4 Punkte)

Bestimme die Umkehrabbildung zur Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + y^2, -y^4 - 2xy^2 - x^2 + y^2 + x + y).$$

(Tipp: Versuche, diese Funktion als Hintereinanderschaltung von einfacheren Abbildungen zu schreiben.)

AUFGABE 51.13. (3 Punkte)

Seien V_1 und V_2 endlichdimensionale reelle Vektorräume, $G \subseteq V_1$ offen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow V_2$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $U \subseteq G$ eine offene Teilmenge derart, dass für jeden Punkt $P \in U$ das totale Differential $(D\varphi)_P$ bijektiv ist. Zeige, dass dann das Bild $\varphi(U)$ offen in V_2 ist.

AUFGABE 51.14. (7 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + y, xy).$$

- (1) Bestimme die regulären Punkte von φ .
- (2) Zeige, dass in den kritischen Punkten die Abbildung φ nicht lokal invertierbar ist, dass also die Einschränkung von φ in keiner offenen Umgebung eines kritischen Punktes bijektiv wird.
- (3) Lässt sich jedes reelle Zahlenpaar (s, p) schreiben als $(s, p) = (x + y, xy)$?
- (4) Ist ein reelles Zahlenpaar (x, y) bis auf Vertauschen der Komponenten eindeutig durch die Summe $x + y$ und das Produkt xy festgelegt?

AUFGABE 51.15. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, xy + xz + yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt (x, y, z) genau dann ein kritischer Punkt von φ ist, wenn in (x, y, z) zwei Zahlen doppelt vorkommen.

AUFGABE 51.16. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (x^2 - y^2z, y + \sin xz).$$

Zeige, dass die Menge der kritischen Punkte von φ eine Gerade umfasst, aber auch noch weitere (mindestens einen) Punkte enthält.