Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 41

Vielfachheiten und diagonalisierbare Abbildungen

Satz 41.1. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom χ_φ in Linearfaktoren zerfällt und wenn für jede Nullstelle λ mit der algebraischen Vielfachheit μ_λ die Gleichheit

$$\mu_\lambda = \dim\left(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)\right)$$

gilt.

Beweis. Wenn φ diagonalisierbar ist, so kann man sofort annehmen, dass φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird. Die Diagonaleinträge dieser Matrix sind die Eigenwerte, und diese wiederholen sich gemäß ihrer geometrischen Vielfachheit. Das charakteristische Polynom lässt sich auch direkt aus dieser Diagonalmatrix ablesen, jeder Diagonaleintrag λ trägt als Linearfaktor $X - \lambda$ bei.

Für die Umkehrung seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte und

$$\mu_i := \mu_{\lambda_i}(\varphi) = \dim\left(\operatorname{Eig}_{\lambda_i}(\varphi)\right)$$

seien die (geometrischen und algebraischen) Vielfachheiten. Da nach Voraussetzung das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, muss die Summe dieser Zahlen gleich $n = \dim(V)$ sein. Es seien

$$v_{ij},\ j = 1, \ldots, \mu_i\,,$$

Basen der Eigenräume $\operatorname{Eig}_{\lambda_i}(\varphi)$ für $i = 1, \ldots, k$. Dies sind insgesamt n Vektoren. Sei

$$\sum_{i,j} b_{ij} v_{ij} = 0$$

eine Darstellung der 0. Mit

$$w_i := \sum_{j=1}^{\mu_i} b_{ij} v_{ij} \in \operatorname{Eig}_{\lambda_i}(\varphi)$$

ergibt sich $\sum_{i=1}^k w_i = 0$, wobei die w_i aus den verschiedenen Eigenräumen sind. Nach Lemma 39.14 sind diese Vektoren linear unabhängig, also müssen alle $w_i = 0$ sein. Damit müssen auch alle $b_{ij} = 0$ sein und die gewählten

Basisvektoren der Eigenräume sind linear unabhängig. Daher bilden sie eine Basis. □

Das Produkt von zwei Diagonalmatrizen ist natürlich wieder eine Diagonalmatrix. Das folgende Beispiel zeigt, dass das Produkt von diagonalisierbaren Matrizen nicht diagonalisierbar sein muss.

Beispiel 41.2. Es seien G_1 und G_2 zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$ durch den Nullpunkt und es seien φ_1 und φ_2 die Achsenspiegelungen an diesen Achsen. Eine Achsenspiegelung ist stets diagonalisierbar, und zwar sind die Spiegelungsachse und die dazu senkrechte Gerade Eigengeraden (zu den Eigenwerten 1 und -1). Die Hintereinanderschaltung $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ dieser Spiegelungen ist eine Drehung, und zwar ist der Drehwinkel das Doppelte des Winkels zwischen den beiden Achsen. Eine Drehung ist aber nur dann diagonalisierbar, wenn der Drehwinkel 0 oder 180 Grad beträgt. Wenn der Winkel zwischen den Achsen von $0, 90, 180$ Grad verschieden ist, so besitzt ψ keinen Eigenvektor.

Trigonalisierbare Abbildungen und jordansche Normalform

Definition 41.3. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ heißt *trigonalisierbar*, wenn sie bezüglich einer geeigneten Basis durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben wird.

Diagonalisierbare lineare Abbildungen sind insbesondere trigonalisierbar. Die Umkehrung gilt nicht, wie Beispiel 40.7 zeigt.

Satz 41.4. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist trigonalisierbar.*
(2) *Das charakteristische Polynom χ_φ zerfällt in Linearfaktoren.*

Wenn φ trigonalisierbar ist und bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben wird, so gibt es eine invertierbare Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ derart, dass BMB^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis. Wir beweisen nur die Richtung von (1) nach (2). Das charakteristische Polynom von φ ist gleich dem charakteristischen Polynom χ_M, wobei M eine beschreibende Matrix bezüglich einer beliebigen Basis ist. Wir können also annehmen, dass M eine obere Dreiecksmatrix ist. Dann ist nach Lemma 11.8 das charakteristische Polynom das Produkt der Linearfaktoren zu den Diagonaleinträgen. Die Rückrichtung ist deutlich aufwändiger. □

Satz 41.5. *Es sei $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine quadratische Matrix mit komplexen Einträgen. Dann ist M trigonalisierbar.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 41.4 und dem Fundamentalsatz der Algebra. □

Beispiel 41.6. Wir betrachten eine reelle 2×2-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_M &= \det(xE_2 - M) \\ &= \det \begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix} \\ &= (x-a)(x-d) - bc \\ &= x^2 - (a+d)x + ad - bc \\ &= \left(x - \frac{a+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 + ad - bc \\ &= \left(x - \frac{a+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 - bc. \end{aligned}$$

Dieses Polynom zerfällt in (reelle) Linearfaktoren genau dann, wenn $\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc \geq 0$ ist. Genau in diesem Fall ist die Matrix nach Satz 41.4 trigonalisierbar.

Definition 41.7. Es sei K ein Körper und $\lambda \in K$. Unter einer *Jordanmatrix* (zum Eigenwert) λ versteht man eine quadratische Matrix der Form[1]

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Wenn man eine solche Jordanmatrix als lineare Abbildung φ des Standardraumes K^n in sich interpretiert, so ist

$$\varphi(e_1) = \lambda e_1 \text{ und } \varphi(e_k) = \lambda e_k + e_{k-1} \text{ für alle } k \geq 2\,.$$

Insbesondere ist e_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Eine einfache Überlegung zeigt, dass es keine dazu linear unabhängigen Eigenvektoren geben kann (siehe Aufgabe 41.11). Die Eigenschaft rechts ist äquivalent zur Bedingung[2]

$$e_{k-1} = (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})(e_k)$$

[1] Manche Autoren verstehen unter einer Jordanmatrix eine Matrix, in der die Einsen unterhalb der Diagonalen stehen.

[2] Im Kontext der trigonalisierbaren Abbildungen und zum Auffinden der jordanschen Normalform ist es sinnvoll, mit $\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ anstatt mit $\lambda \cdot \mathrm{Id} - \varphi$ zu arbeiten.

für $k \geq 2$. Als Eigenvektor ist e_1 ein erzeugendes Element des Kerns der Abbildung $\psi := \varphi - \lambda \operatorname{Id}$, und die anderen Standardvektoren e_k ergeben sich sukzessive als Urbild von e_{k-1} unter ψ. Diese Beobachtung liefert den Hintergrund für das weiter unten beschriebene Verfahren zum Aufstellen einer Jordanmatrix.

Definition 41.8. Eine quadratische Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{k-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & J_k \end{pmatrix},$$

wobei die J_i Jordanmatrizen sind, heißt Matrix in *jordanscher Normalform.*

Die dabei auftretenden Jordanmatrizen heißen Jordanblöcke der Matrix. Ihre Eigenwerte können verschieden oder gleich sein. In der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gibt es drei Jordanblöcke, nämlich

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

zu den Eigenwerten $2, 4$ und nochmal 2.

Definition 41.9. Zwei quadratische Matrizen $M, N \in \operatorname{Mat}_n(K)$ heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix B gibt mit $M = BNB^{-1}$.

Satz 41.10. *Eine obere Dreiecksmatrix ist ähnlich zu einer Matrix in jordanscher Normalform.*

Beweis. Wir verzichten auf den recht aufwändigen Beweis. □

Diese Aussage kann man so interpretieren, dass es für eine trigonalisierbare lineare Abbildung φ eine Basis gibt derart, dass φ bezüglich dieser Basis durch eine Matrix in jordanscher Normalform beschrieben wird. Über den komplexen Zahlen kann man dies also stets erreichen.

Verfahren 41.11. Wir beschreiben, wie man zu einer linearen trigonalisierbaren Abbildung eine Basis findet, bezüglich der die beschreibende Matrix in jordanscher Normalform ist. Dazu bestimmt man zunächst eine Basis für die

Eigenräume zu sämtlichen Eigenwerten. Man nimmt sich nun diese Eigenvektoren der Reihe nach vor, jeder dieser Vektoren führt zu einem Jordanblock. Sei u ein solcher Eigenvektor zum Eigenwert λ. Dann betrachtet man das lineare Gleichungssystem

$$u = (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})v$$

(zumeist ist φ selbst durch eine Matrix gegeben, von der man das λ-fache der Einheitsmatrix abziehen muss). Wenn dieses keine Lösung besitzt, so ist u Teil der gesuchten Basis und der zugehörige Jordanblock besteht allein aus λ. Wenn es eine Lösung v gibt, so ist insbesondere $\varphi(v) = \lambda v + u$. Man betrachtet dann das lineare Gleichungssystem

$$v = (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})w$$

und sucht nach einer Lösung für w, und so weiter, bis man bei einem Gleichungssystem angelangt ist, das keine Lösung besitzt. Dann sind die Vektoren $u, v, w, \ldots$ Teil der gesuchten Basis (die Anzahl dieser Vektoren ist die Länge des Jordanblocks), und man arbeitet den nächsten Eigenvektor ab.

Beispiel 41.12. Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und wollen sie auf jordansche Normalform bringen. Es ist $u = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2. Es ist

$$A := M - 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

so dass es keinen weiteren linear unabhängigen Eigenvektor gibt. Wir interessieren uns für das lineare Gleichungssystem

$$e_1 = Av \,.$$

Daraus ergibt sich sofort (aus der zweiten Zeile) $v_3 = 0$ und somit $2v_2 = 1$ (v_1 können wir frei als 0 wählen). Also setzen wir $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Schließlich brauchen wir eine Lösung für

$$v = Aw \,.$$

Dies führt auf

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} .$$

Für die durch die Matrix M beschriebene lineare Abbildung gilt somit

$$Mu = 2u,\ Mv = 2v + u,\ Mw = 2w + v\,,$$

sodass die Abbildung bezüglich dieser Basis durch

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Diese Matrix ist eine Jordanmatrix und insbesondere in jordanscher Normalform.

Beispiel 41.13. Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und wollen sie auf jordansche Normalform bringen. Es sind $u = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert 2. Es ist

$$A := M - 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

so dass u und v den Eigenraum aufspannen. Das lineare Gleichungssystem

$$e_1 = Aw$$

besitzt keine Lösung. Hingegen besitzt das lineare Gleichungssystem

$$e_2 = Aw$$

die Lösung $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Für die durch die Matrix M beschriebene lineare Abbildung gilt somit

$$Mu = 2u,\ Mv = 2v,\ Mw = 2w + v\,,$$

sodass die Abbildung bezüglich dieser Basis durch

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Diese Matrix ist in jordanscher Normalform mit den Jordanblöcken (2) und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Abbildungsverzeichnis