Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Vorlesung 25

Der große Umordnungssatz

Satz 25.1. *(Großer Umordnungssatz) Es sei a_i , $i \in I$, eine summierbare Familie von komplexen Zahlen mit der Summe s. Es sei J eine weitere Indexmenge und zu jedem $j \in J$ sei eine Teilmenge $I_j \subseteq I$ gegeben mit $\bigcup_{j \in J} I_j = I$ und $I_j \cap I_{j'} = \emptyset$ für $j \neq j'$.*[1] *Dann sind die Teilfamilien a_i , $i \in I_j$, summierbar und für ihre Summen $s_j = \sum_{i \in I_j} a_i$ gilt, dass die Familie s_j , $j \in J$, summierbar ist mit*

$$s = \sum_{j \in J} s_j .$$

Beweis. Die Summierbarkeit der Teilfamilien folgt aus Korollar 24.16. Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da die Ausgangsfamilie summierbar ist, gibt es eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ mit

$$| a_E - s | \leq \epsilon/2$$

für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq I$ mit $E_0 \subseteq E$. Es gibt eine endliche Teilmenge $F_0 \subseteq J$ derart, dass

$$E_0 \subseteq \bigcup_{j \in F_0} I_j$$

ist. Wir behaupten, dass dieses F_0 für die Familie s_j , $j \in J$, die Summationseigenschaft für ϵ erfüllt. Sei dazu $F \subseteq J$ mit $F_0 \subseteq F$ endlich und $n = \#(F)$. Da die Familien a_i , $i \in I_j$, summierbar sind mit den Summen s_j, gibt es für jedes $j \in F$ ein endliches $G_{j,0} \subseteq I_j$ mit

$$| a_{G_j} - s_j | \leq \epsilon/2n$$

für alle endlichen $G_j \subseteq I_j$ mit $G_{j,0} \subseteq G_j$. Wir wählen nun für jedes $j \in F$ ein solches G_j so, dass zusätzlich $E_0 \cap I_j \subseteq G_j$ gilt. Dann ist $E_0 \subseteq E := \bigcup_{j \in F} G_j$ und daher $| \sum_{j \in F} a_{G_j} - s | = | \sum_{i \in E} a_i - s | \leq \epsilon/2$. Somit haben wir insgesamt die Abschätzungen

$$\begin{aligned} | \sum_{j \in F} s_j - s | &= | \sum_{j \in F} (s_j - a_{G_j}) + \sum_{j \in F} a_{G_j} - s | \\ &\leq \sum_{j \in F} | s_j - a_{G_j} | + | \sum_{j \in F} a_{G_j} - s | \end{aligned}$$

[1] D.h. die I_j bilden eine disjunkte Vereinigung von I.

$$\begin{aligned} &\leq n \cdot \epsilon/2n + \left| \sum_{i \in E} a_i - s \right| \\ &\leq n \cdot \epsilon/2n + \epsilon/2 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Cauchy-Produkt von Reihen

Definition 25.2. Zu zwei Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

komplexer Zahlen heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen.

Lemma 25.3. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

zwei absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen. Dann ist auch das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *absolut konvergent und für die Summe gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = (\sum_{k=0}^{\infty} a_k) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} b_k)\,.$$

Beweis. Wir müssen für die Partialsummen

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} a_i,\; y_n = \sum_{j=0}^{n} b_j \text{ und } z_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

zeigen, dass z_n gegen den Limes der Folge $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Es ist

$$\begin{aligned} |z_n - x_n y_n| &= \left| \sum_{k=0}^{n} c_k - (\sum_{i=0}^{n} a_i)(\sum_{j=0}^{n} b_j) \right| \\ &= \left| \sum_{0 \leq i \leq n,\, 0 \leq j \leq n,\, i+j > n} a_i b_j \right| \\ &\leq \sum_{0 \leq i \leq n,\, 0 \leq j \leq n,\, i+j > n} |a_i| |b_j| \\ &\leq \Big(\sum_{n/2 < i \leq n} |a_i| \Big) \Big(\sum_{j=0}^{n} |b_j| \Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big(\sum_{n/2<j\leq n} |\, b_j\,|\Big)\Big(\sum_{i=0}^{n} |\, a_i\,|\Big)\\
\leq\;& \Big(\sum_{n/2<i\leq n} |\, a_i\,|\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} |\, b_j\,|\Big)\\
&+\Big(\sum_{n/2<j\leq n} |\, b_j\,|\Big)\Big(\sum_{i=0}^{\infty} |\, a_i\,|\Big).
\end{aligned}
$$

Da die beiden Reihen absolut konvergieren, und $\sum_{n/2<i\leq n} |\, a_i\,|$ und $\sum_{n/2<j\leq n} |\, b_j\,|$ Nullfolgen sind (siehe Aufgabe 25.17), ist die rechte Seite insgesamt eine Nullfolge. Daher konvergiert die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen das Produkt der Grenzwerte. Die absolute Konvergenz folgt aus dem bisher Bewiesenen und aus der Abschätzung $|\, c_k\,|\leq \sum_{i=0}^{k} |\, a_i\,||\, b_{k-i}\,|$. □

Potenzreihen

DEFINITION 25.4. Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen und z eine weitere komplexe Zahl. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

die *Potenzreihe* in z zu den Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Durch Wahl geeigneter Koeffizienten kann man jede Reihe als Potenzreihe zu einer fixierten Basis $z\in\mathbb{C}$ ansehen. Bei Potenzreihen ist es aber wichtig, dass man z variieren lässt und dann die Potenzreihe im Konvergenzbereich eine Funktion in z darstellt.

Eine wichtige Potenzreihe haben wir schon das letzte Mal kennengelernt, nämlich die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, die für $|\, z\,|< 1$ konvergiert und dort die Funktion $1/(1-z)$ darstellt. Eine weitere besonders wichtige Potenzreihe ist die Exponentialreihe, die für jede komplexe Zahl konvergiert und zur komplexen Exponentialfunktion führt.

Die Exponentialreihe und die komplexe Exponentialfunktion

DEFINITION 25.5. Für jedes $z\in\mathbb{C}$ heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

die *Exponentialreihe* in z.

Dies ist also die Reihe

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \dots .$$

Satz 25.6. *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponentialreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

absolut konvergent.

Beweis. Für $z = 0$ ist die Aussage richtig. Andernfalls betrachten wir den Quotienten

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| = \frac{|z|}{n+1}.$$

Dies ist für $n \geq 2 \, |z|$ kleiner als $1/2$. Aus dem Quotientenkriterium folgt daher die Konvergenz. □

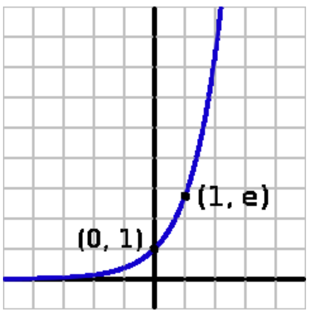
Aufgrund dieser Eigenschaft können wir die komplexe Exponentialfunktion definieren.

Definition 25.7. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \, z \longmapsto \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

heißt *Exponentialfunktion.*

Wir werden später sehen, dass diese Funktion für reelle Argumente die Exponentialfunktion zur Basis $\exp 1$ ist, und dass $\exp 1$ mit der früher eingeführten eulerschen Zahl e übereinstimmt.



Der Graph der reellen Exponentialfunktion

Satz 25.8. *Für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w \, .$$

Beweis. Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

mit $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{z^i}{i!} \frac{w^{n-i}}{(n-i)!}$. Diese Reihe ist nach Lemma 25.3 absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der n-te Summand der Exponentialreihe von $z + w$ gleich

$$\frac{(z+w)^n}{n!} \;=\; \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i w^{n-i} \;=\; c_n,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen. □

Korollar 25.9. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\; z \longmapsto \exp z,$$

besitzt folgende Eigenschaften.

1. *Es ist* $\exp 0 = 1$.
2. *Für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *ist* $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$. *Insbesondere ist* $\exp z \neq 0$.
3. *Für ganze Zahlen* $n \in \mathbb{Z}$ *ist* $\exp n = (\exp 1)^n$.
4. *Für reelles* z *ist* $\exp z \in \mathbb{R}_+$.
5. *Für reelle Zahlen* $z > 0$ *ist* $\exp z > 1$ *und für* $z < 0$ *ist* $\exp z < 1$.
6. *Die reelle Exponentialfunktion* [2] *ist streng wachsend.*

Beweis. (1) folgt direkt aus der Definition. (2) folgt aus

$$\exp z \cdot \exp(-z) \;=\; \exp(z - z) \;=\; \exp 0 \;=\; 1$$

aufgrund von Satz 25.8. (3) folgt aus Satz 25.8 und (2). (4). Der Wert der Exponentialreihe für eine reelle Zahl ist wieder reell, da die reellen Zahlen in $\mathbb{C}$ abgeschlossen sind. Die Nichtnegativität ergibt sich aus

$$\exp z \;=\; \exp\Big(\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\Big) \;=\; \exp \frac{z}{2} \cdot \exp \frac{z}{2} \;=\; \Big(\exp \frac{z}{2}\Big)^2 \;\geq\; 0.$$

(5). Für reelles x ist $\exp x \cdot \exp(-x) = 1$, so dass nach (4) ein Faktor ≥ 1 sein muss und der andere Faktor ≤ 1. Für $x > 0$ ist

$$\exp x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \;>\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-x)^n \;=\; \exp(-x),$$

da ja für gerades n die Summationsglieder übereinstimmen und für ungerades n die linke Seite größer als die rechte ist. Also ist $\exp x > 1$. (6). Für reelle $w > z$ ist $w - z > 0$ und daher nach (5) $\exp(w - z) > 1$, also

$$\exp w \;=\; \exp(w - z + z) \;=\; \exp(w - z) \exp z \;>\; \exp z.$$

[2] Unter der reellen Exponentialfunktion verstehen wir hier die Einschränkung der komplexen Exponentialfunktion auf die reellen Zahlen. Wir werden bald sehen, dass sie mit der Exponentialfunktion zur Basis e übereinstimmt.

$\square$

Die trigonometrischen Reihen

Definition 25.10. Für $z \in \mathbb{C}$ heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

die *Kosinusreihe* und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

die *Sinusreihe* zu z.

Durch Vergleich mit der Exponentialreihe ergibt sich sofort, dass diese beiden Reihen für jedes z absolut konvergieren. Die zugehörigen Funktionen

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \text{ und } \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

heißen *Sinus* und *Kosinus*. Beide Funktionen stehen unmittelbar in Zusammenhang mit der Exponentialfunktion, wobei man allerdings die komplexen Zahlen braucht, um diesen Zusammenhang zu erkennen.

Satz 25.11. *Die Funktionen*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \cos z\,,$$

und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sin z\,,$$

besitzen für $z, w \in \mathbb{C}$ folgende Eigenschaften.

(1) *Für $z = x + iy$ ist*

$$\exp z = (\exp x)(\cos y + i \sin y)\,.$$

(2) *Es ist* $\cos 0 = 1$ *und* $\sin 0 = 0$.
(3) *Es ist* $\cos(-z) = \cos z$ *und* $\sin(-z) = -\sin z$.
(4) *Es ist*

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

und

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}\,.$$

(5) *Es gelten die Additionstheoreme*

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w\,.$$

und

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w\,.$$

(6) *Es gilt*

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1 .$$

Beweis. (1). Aufgrund von Satz 25.8 gilt

$$\exp(x+iy) \;=\; \exp x \cdot \exp(iy),$$

so dass wir nur noch den hinteren Faktor betrachten müssen. Da man absolut konvergente Reihen beliebig sortieren darf, gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i(-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos y + i \sin y .
\end{aligned}$$

(2) und (3) folgen direkt aus der Definition der Reihen. (4) folgt aus (1) und (3). (5). Es ist

$$\begin{aligned}
\cos(z+w) &= \frac{\exp(i(z+w)) + \exp(-i(z+w))}{2} \\
&= \frac{\exp(iz)\exp(iw) + \exp(-iz)\exp(-iw)}{2} \\
&= \frac{1}{2}((\cos z + i \sin z)(\cos w + i \sin w) \\
&\quad +(\cos z - i \sin z)(\cos w - i \sin w)) \\
&= \frac{1}{2}(\cos z \cos w \\
&\quad + i(\cos z \sin w + \sin z \cos w) - \sin z \sin w \\
&\quad + \cos z \cos w \\
&\quad - i(\cos z \sin w + \sin z \cos w) \\
&\quad - \sin z \sin w) \\
&= \cos z \cos w - \sin z \sin w .
\end{aligned}$$

Das Additionstheorem für den Sinus folgt ähnlich. (6). Aus dem Additionstheorem für den Cosinus angewendet auf $w = -z$ und aufgrund von (2) ergibt sich

$$\begin{aligned}
1 &= \cos 0 \\
&= \cos(z-z) \\
&= \cos z \cos(-z) - \sin z \sin(-z) \\
&= \cos z \cos z + \sin z \sin z .
\end{aligned}$$

□

Für reelle z sind $\sin z$ und $\cos z$ wieder reell, wie unmittelbar aus der Potenzreihendarstellung folgt. Die letzte Aussage im vorstehenden Satz besagt, dass für reelles z das Paar $(\cos z\,, \sin z\,)$ ein Punkt auf dem *Einheitskreis* $\{(x,y)|\, x^2 + y^2 = 1\}$ ist. Wir werden später sehen, dass sich jeder Punkt des Einheitskreises als $(\cos z\,, \sin z\,)$ schreiben lässt, wobei man z als Winkel interpretieren kann. Dabei tritt die Periode 2π auf, wobei wir die *Kreiszahl* π eben über die trigonometrischen Funktionen einführen werden

Abbildungsverzeichnis