

Analysis I**Arbeitsblatt 22****Übungsaufgaben**

AUFGABE 22.1. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 4 der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \sin z \cos z,$$

im Nullpunkt.

AUFGABE 22.2. Bestimme sämtliche Taylor-Polynome der Funktion

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

im Entwicklungspunkt $a = 3$.

AUFGABE 22.3. Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ im Punkt $a = 3$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

AUFGABE 22.4.*

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 zur Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$.

AUFGABE 22.5.*

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = e^{x^2} - x$$

im Entwicklungspunkt $a = 1$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 1 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

AUFGABE 22.6.*

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

AUFGABE 22.7.*

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \sin x$$

im Punkt $\pi/2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt $\pi/2$ an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

AUFGABE 22.8. Bestimme die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion für einen beliebigen Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$.

AUFGABE 22.9. Bestimme das Polynom

$$f(z) = z^3 + 3z^2 - 7z - 4.$$

in der neuen Variablen $z - 2$ (also das unentwickelte Polynom) auf zwei verschiedene Arten, nämlich

- a) direkt durch Einsetzen,
- b) über das Taylorpolynom im Entwicklungspunkt 2.

AUFGABE 22.10. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$ eine konvergente Potenzreihe. Bestimme die Ableitungen $f^{(k)}(a)$.

AUFGABE 22.11. Es sei $p \in \mathbb{R}[Y]$ ein Polynom und

$$g: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto g(x) = p\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass die Ableitung $g'(x)$ ebenfalls von der Form

$$g'(x) = q\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

mit einem weiteren Polynom q ist.

AUFGABE 22.12. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n -te Ableitung $f^{(n)}$ die Eigenschaft

$$\lim_{x \in \mathbb{R}_+, x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$$

besitzt.

AUFGABE 22.13. Bestimme den Wendepunkt der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto e^{-\frac{1}{x}}.$$

AUFGABE 22.14. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $z \in \mathbb{C}$ sei eine Nullstelle von P . Zeige, dass dann auch die konjugiert-komplexe Zahl \bar{z} eine Nullstelle von P ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 22.15. (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Polynome bis zum Grad 4 der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \sin(\cos z) + z^3 \exp(z^2).$$

AUFGABE 22.16. (4 Punkte)

Bestimme das Polynom

$$f(z) = z^3 + (4 - i)z^2 - 2iz + 5.$$

in der neuen Variablen $z - 1 - i$ (also das unentwickelte Polynom) auf zwei verschiedene Arten, nämlich

- direkt durch Einsetzen,
- über das Taylorpolynom im Entwicklungspunkt $1 + i$.

AUFGABE 22.17. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \sin x \cos x,$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

4

AUFGABE 22.18. (6 Punkte)

Sei ϵ , $0 < \epsilon \leq \frac{1}{3}$, vorgegeben. Zeige, dass es eine unendlich oft differenzierbare Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 & \text{für } x \geq \epsilon \text{ und } x \leq 1 - \epsilon, \\ 0 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$