Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 34

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 34.1. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, t \longmapsto f(t) = \left(t^2 - \sin t\,, e^{-t} + 2t^3, t \cdot \sinh t + \frac{1}{t^2+1} \right),$$

in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 34.2. Skizziere die Bilder und die Graphen der folgenden Kurven im $\mathbb{R}^2$.

(1) $t \longmapsto (t^2, t^2)$,
(2) $t \longmapsto (t^2, -t^2)$,
(3) $t \longmapsto (t^2, t)$,
(4) $t \longmapsto (2t, 3t)$,
(5) $t \longmapsto (t^2, t^3)$.

Aufgabe 34.3. Sei V ein euklidischer Vektorraum und $v, w \in W$. Zeige, dass die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow V,\, t \longmapsto tv + w,$$

differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(t) = v$.

Aufgabe 34.4. Es sei I ein reelles Intervall und V ein euklidischer Vektorraum. Es seien

$$f, g\colon I \longrightarrow V$$

zwei in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurven und es sei

$$h\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in t_0 differenzierbare Funktion. Zeige, dass folgende Aussagen gelten.

(1) Die Summe

$$f + g\colon I \longrightarrow V,\, t \longmapsto f(t) + g(t),$$

ist in t_0 differenzierbar mit

$$(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)\,.$$

(2) Das Produkt

$$hf\colon\, I \longrightarrow V,\, t \longmapsto h(t)f(t),$$

ist differenzierbar in t_0 mit

$$(hf)'(t_0) = h(t_0)f'(t_0) + h'(t_0)f(t_0)\,.$$

Insbesondere ist für $c \in \mathbb{R}$ auch cf differenzierbar in t_0 mit

$$(cf)'(t_0) = cf'(t_0)\,.$$

(3) Wenn h nullstellenfrei ist, so ist auch die Quotientenfunktion

$$\frac{f}{h}\colon\, I \longrightarrow V,\, t \longmapsto \frac{f(t)}{h(t)},$$

in t_0 differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{h}\right)'(t_0) = \frac{h(t_0)f'(t_0) - h'(t_0)f(t_0)}{(h(t_0))^2}\,.$$

Aufgabe 34.5. Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge und sei $a \in M$ ein Berührpunkt von T. Es sei

$$f\colon\, T \longrightarrow V$$

eine Abbildung in einen euklidischen Vektorraum V mit den Komponentenfunktionen

$$f_1, \ldots, f_n\colon\, T \longrightarrow \mathbb{R}$$

bezüglich einer Basis von V. Zeige, dass der Limes

$$\lim_{x \to a}\, f(x)$$

genau dann existiert, wenn sämtliche Limiten

$$\lim_{x \to a}\, f_j(x)$$

existieren.

Aufgabe 34.6. Es seien

$$f, g\colon\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

zwei differenzierbare Kurven. Berechne die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto \langle f(t), g(t)\rangle.$$

Aufgabe 34.7. Betrachte die differenzierbare Kurve

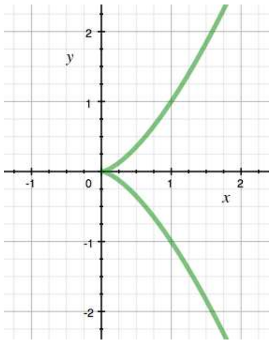
$$\varphi\colon\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto \left(t^3,\, e^t\right).$$

Bestimme einen Kreis (mit Mittelpunkt und Radius) und eine Parametrisierung ψ dieses Kreises derart, dass ψ und φ für $t = 1$ bis zur zweiten Ableitung übereinstimmen.

Aufgabe 34.8. Das Bild der durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \left(t^2,\ t^3\right),$$

definierten Kurve heißt *Neilsche Parabel.* Zeige, dass ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann zu diesem Bild gehört, wenn er die Gleichung $x^3 = y^2$ erfüllt.



Aufgabe 34.9. (4 Punkte)

Es seien $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ endlich viele Punkte und sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$. Zeige, dass es zu je zwei Punkten $P, Q \in M$ eine differenzierbare Kurve

$$\varphi\colon\ [0, 1] \longrightarrow M$$

mit $\varphi(0) = P$ und $\varphi(1) = Q$ gibt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 34.10. (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Kurve

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \left(\frac{\sin\, t^2}{t^5}, 4^t, \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right),$$

für jeden Punkt $t \in \mathbb{R}_+$.

Aufgabe 34.11. (4 Punkte)

Betrachte die Kurve

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ x \longmapsto \left(x^2 - x,\ x^3 + \sinh x\ ,\ \sin\left(x^2\right)\right).$$

a) Bestimme die Ableitung von f in jedem Punkt x.

b) Bestimme die Komponentenfunktionen von f bezüglich der neuen Basis

$$(1, 0, 3), (2, 4, 6), (1, -1, 0)$$

von $\mathbb{R}^3$.

c) Berechne die Ableitung in der neuen Basis direkt und mit Hilfe von Lemma 34.9.

Aufgabe 34.12. (4 (2+1+1) Punkte)

Auf einem Jahrmarkt befindet sich ein „Doppel-Karussell“, bei dem sich ein Sitz alle 2 Sekunden um einen kleinen Kreis mit Radius 3 Meter dreht, wobei sich der Mittelpunkt dieses Kreises seinerseits alle 8 Sekunden um einen großen Kreis mit Radius 10 Meter dreht. Beide Drehungen sind im Uhrzeigersinn. Zum Zeitpunkt $t = 0$ besitzt der Sitz zum Mittelpunkt den Abstand 13 Meter.

a) Beschreibe diesen Bewegungsvorgang (in einem geeigneten Koordinatensystem) als eine differenzierbare Kurve.[1]

b) Berechne den Geschwindigkeitsvektor dieser Bewegung zu jedem Zeitpunkt.

c) Berechne die Geschwindigkeit (den Betrag des Geschwindigkeitsvektors) dieser Bewegung zu jedem Zeitpunkt.

Aufgabe 34.13. (6 Punkte)

Bestimme in der Situation von Aufgabe 34.12 die Zeitpunkte, an denen die Geschwindigkeit maximal oder minimal wird.

Aufgabe 34.14. (4 Punkte)

Sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \left(t^2,\ t^3\right).$$

Bestimme die Punkte $t_0 \in \mathbb{R}$, für die der Abstand der zugehörigen Kurvenpunkte $f(t) = (t^2, t^3)$ zum Punkt $(1, 0)$ minimal wird.

Aufgabe 34.15. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine differenzierbare Kurve und $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Es sei $t_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass der Abstand $d(P, f(t))$ (zwischen P und einem Kurvenpunkt) in t_0 minimal werde. Zeige, dass $P - f(t_0)$ senkrecht zu $f'(t_0)$ ist.

[1]Gefragt ist hier nach der mathematischen Überlagerung der beiden Bewegungen, d.h. die große Bewegung verdreht nicht das Koordinatensystem der kleinen Bewegung. Eine volle Umdrehung des kleinen Kreises liegt vor, wenn der Verbindungspfeil aus dem äußeren Drehmittelpunkt und dem Sitz wieder in die gleiche Himmelsrichtung zeigt. Bei der mechanischen Überlagerung, die vorliegt, wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit des äußeren montierten Motors feststeht, sieht dies anders aus.

Aufgabe zum Hochladen

Aufgabe 34.16. (6 Punkte)

Erstelle eine Animation zu Aufgabe 34.12.

Abbildungsverzeichnis