Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 17

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1. Bestimme in $\mathbb{F}_3[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^3 + 2X^2 + X + 2$ und $Q = 2X^2 + 1$.

Man gebe auch eine Darstellung des ggT an.

Aufgabe 2. Zeige, dass die Assoziiertheit in einem kommutativen Ring eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 3. Sei R ein Integritätsbereich und sei $f \in R$, $f \neq 0$, ein Element. Zeige, dass f genau dann ein Primelement ist, wenn der Restklassenring $R/(f)$ ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Wie lautet das Ergebnis der Division mit Rest, wenn man ein Polynom P durch X^m teilt?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Beweise die folgenden Eigenschaften zur Teilbarkeit in einem kommutativen Ring R:

(1) Für jedes Element a gilt $1|a$ und $a|a$.
(2) Für jedes Element a gilt $a|0$.
(3) Gilt $a|b$ und $b|c$, so gilt auch $a|c$.
(4) Gilt $a|b$ und $c|d$, so gilt auch $ac|bd$.
(5) Gilt $a|b$, so gilt auch $ac|bc$ für jedes $c \in R$.
(6) Gilt $a|b$ und $a|c$, so gilt auch $a|rb+sc$ für beliebige Elemente $r, s \in R$.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Zeige, dass in einem Integritätsbereich R zwei Elemente a und b genau dann assoziiert sind, wenn für die Hauptideale $Ra = Rb$ gilt.

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich und sei $R[X]$ der Polynomring darüber. Zeige, dass ein Polynom der Form $X + c$ ein Primelement ist.

Man gebe auch ein Beispiel, dass dies für Polynome der Form $aX + c$ nicht gelten muss.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{C}[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^3 + (2 - i)X^2 + 4$ und $Q = (3 - i)X^2 + 5X - 3$.

Man gebe auch eine Darstellung des ggT an.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{F}_5[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^4 + 3X^3 + X^2 + 4X + 2$ und $Q = 2X^3 + 4X^2 + X + 3$.

Man gebe auch eine Darstellung des ggT an.

Aufgabe 10. (4 Punkte)

Betrachte den Unterring

$$R = K[X^2, X^3, X^4, X^5, \ldots] \subset K[X]\,.$$

Zeige, dass die Elemente X^2 und X^3 in R irreduzibel, aber nicht prim sind.

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Es sei $R = \mathbb{Z}[\frac{2}{3}]$ der von $\mathbb{Z}$ und $2/3$ erzeugte Unterring von $\mathbb{Q}$. Zeige, dass R alle rationalen Zahlen, die sich mit einer Potenz von 3 im Nenner schreiben lassen, enthält.