

## Analysis II

### Vorlesung 41

#### Differentialgleichungen höherer Ordnung

DEFINITION 41.1. Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und

$$h: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann nennt man den Ausdruck

$$y^{(n)} = h(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

eine *Differentialgleichung der Ordnung  $n$* .

Unter einer *Lösung einer Differentialgleichung höherer Ordnung* versteht man eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion

$$y: J \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto y(t)$$

(wobei  $J \subseteq I$  ein offenes Teilintervall ist) derart, dass

$$y^{(n)}(t) = h(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

für alle  $t \in J$  gilt.

Differentialgleichungen beliebiger Ordnung können unter Inkaufnahme von neuen Variablen auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung zurückgeführt werden.

LEMMA 41.2. Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und

$$h: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann ist die *Differentialgleichung höherer Ordnung*

$$y^{(n)} = h(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

über die *Beziehung*

$$v_i := y^{(i)}$$

äquivalent zum *Differentialgleichungssystem*

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ h(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* Wenn

$$y: J \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Lösung der Differentialgleichung höherer Ordnung

$$y^{(n)} = h(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

ist, so sind alle Funktionen  $v_i = y^{(i)}$  für  $i = 0, \dots, n-1$  differenzierbar, und es gilt  $v'_i = v_{i+1}$  für  $i = 0, \dots, n-2$  nach Definition und schließlich

$$\begin{aligned} v'_{n-1}(t) &= (y^{(n-1)})'(t) \\ &= y^{(n)}(t) \\ &= h(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ &= h(t, v_0(t), v_1(t), v_2(t), \dots, v_{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Wenn umgekehrt

$$v: J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems zum Vektorfeld

$$\begin{aligned} F: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, v_0, \dots, v_{n-1}) &\longmapsto F(t, v_0, \dots, v_{n-1}) \\ &= (v_1, \dots, v_{n-1}, h(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1})), \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich sukzessive aus den ersten  $n-1$  Gleichungen, dass  $y = v_0$   $n$ -mal differenzierbar ist, und die letzte Gleichung des Differentialgleichungssystems besagt gerade

$$y^{(n)}(t) = h(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)).$$

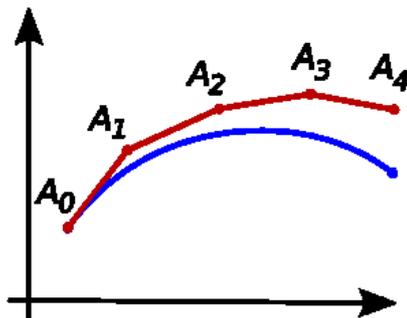
□

Mit dieser Umformung ist auch klar, wie sinnvolle Anfangsbedingungen für eine Differentialgleichung höherer Ordnung aussehen. Man muss nicht nur einen Startwert  $y(t_0) = w_0$ , sondern auch die höheren Ableitungen  $y'(t_0) = w_1$ ,  $y''(t_0) = w_2$ , usw. festlegen.

Es ist im Allgemeinen schwierig, eine Differentialgleichung explizit zu lösen. Wir besprechen daher ein approximierendes Verfahren, nämlich das *eulersche Polygonzugverfahren*.

## Polygonzugverfahren

Mit dem (eulerschen) Polygonzugverfahren wird die Lösungskurve einer Differentialgleichung diskret approximiert.



VERFAHREN 41.3. Es sei ein Vektorfeld

$$F: G \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

auf einer offenen Menge  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  und eine Anfangsbedingung  $y(t_0) = P \in \mathbb{R}^d$  gegeben. Das *eulersche Polygonzugverfahren* funktioniert folgendermaßen: Man wählt eine Schrittweite  $s > 0$  und berechnet rekursiv die Punktfolge  $P_n$ , durch  $P_0 = P$  und

$$P_{n+1} = P_n + sF(t_0 + ns, P_n).$$

Zu einem schon konstruierten Punkt  $P_n$  wird also das  $s$ -fache des Richtungsvektors zum Zeitpunkt  $t_0 + ns$  an diesem Punkt hinzuaddiert. Dies funktioniert nur solange die Punkte im Definitionsbereich des Vektorfeldes liegen. Der zu dieser Punktfolge gehörende *Strecken zug* oder *Polygon zug*

$$\delta: \mathbb{R}_{\geq t_0} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

ist die lineare Interpolation mit  $\delta(t_0 + ns) = P_n$ , d.h. für  $t$  mit  $t_0 + ns \leq t \leq t_0 + (n+1)s$  ist

$$\delta(t) = P_n + \frac{t - t_0 - ns}{s} (P_{n+1} - P_n).$$

Dieser Streckenzug  $\delta$  stellt eine stückweise lineare Approximation der Lösungskurve des Anfangswertproblems dar. Für eine kleinere Schrittweite wird die Approximation im Allgemeinen besser.

BEISPIEL 41.4. Bei einer ortsunabhängigen Differentialgleichung

$$y' = g(t)$$

ergibt sich  $y$  einfach als eine Stammfunktion zu  $g$ . Wendet man in dieser Situation Verfahren 41.3 zum Startzeitpunkt  $t_0$ , zum Startpunkt  $c$  und zur Schrittweite  $s$  an, so ergibt sich die rekursive Beziehung

$$P_0 = c \text{ und } P_{n+1} = P_n + sg(t_0 + ns).$$

Daher ist offenbar

$$P_n = c + s(g(t_0) + g(t_0 + s) + g(t_0 + 2s) + \dots + g(t_0 + (n-1)s)).$$

D.h. dass man zu dem Ausgangswert  $c$  das Treppenintegral zur äquidistanten Unterteilung  $t_0, t_0+s, t_0+2s, \dots, t_0+(n-1)s$  (und zur durch  $g(t_0+ks)$  auf dem

Teilintervall  $[t_0 + ks, t_0 + (k+1)s[$  (gegebenen Treppenfunktion) hinzuaddiert. Der zugehörige Streckenzug ist das (stückweise lineare) Integral zu dieser Treppenfunktion.

BEISPIEL 41.5. Wir wollen für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - ty \\ txy \end{pmatrix} = F(t, x, y)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gemäß Verfahren 41.3 einen approximierenden Streckenzug berechnen. Wir wählen die Schrittweite  $s = \frac{1}{10}$ . Somit ist

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{10}F(0, P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + \frac{1}{10}F\left(\frac{1}{10}, P_1\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \left(\frac{11}{10}\right)^2 - \frac{1}{10} \cdot 1 \\ \frac{1}{10} \cdot \frac{11}{10} \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{111}{100} \\ \frac{11}{100} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 + \frac{1}{10}F\left(\frac{2}{10}, P_2\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \left(\frac{1211}{1000}\right)^2 - \frac{2}{10} \cdot \frac{1011}{1000} \\ \frac{2}{10} \cdot \frac{1211}{1000} \cdot \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{1264321}{1000000} \\ \frac{2448642}{10000000} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{133743210}{100000000} \\ \frac{103548642}{100000000} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## Lineare Differentialgleichungssysteme

DEFINITION 41.6. Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes reelles Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix ist, deren Einträge allesamt Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto a_{ij}(t),$$

sind, heißt *homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung* oder *homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem*.

Es handelt sich also um die Differentialgleichung zum Vektorfeld

$$f: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, v) \longmapsto f(t, v) = (M(t))v = \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \dots + a_{1n}(t)v_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \dots + a_{nn}(t)v_n \end{pmatrix}.$$

Dieses Vektorfeld ist zu jedem fixierten Zeitpunkt  $t \in I$  eine lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, v \longmapsto M(t)v.$$

Ausgeschrieben liegt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \dots + a_{1n}(t)v_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \dots + a_{nn}(t)v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

vor.

Für lineare Differentialgleichungssysteme gibt es wieder eine inhomogene Variante.

**DEFINITION 41.7.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes reelles Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv + z,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix ist, deren Einträge allesamt Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto a_{ij}(t),$$

sind und wobei

$$z: I \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix},$$

eine Abbildung ist, heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung* oder *inhomogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem*. Die Abbildung  $z$  heißt dabei *Störabbildung*.

Insgesamt liegt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \cdots + a_{1n}(t)v_n + z_1(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \cdots + a_{nn}(t)v_n + z_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vor.

Die explizite Lösbarkeit eines solchen Systems hängt natürlich von der Kompliziertheit der beteiligten Funktionen  $a_{ij}$  und  $z_i$  ab. In der folgenden Situation kann man das System auf einzelne lineare Differentialgleichungen zurückführen und dadurch sukzessive lösen.

LEMMA 41.8. *Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und es liege eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung der Form*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

mit stetigen Funktionen  $a_{ij}: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $z_i: I \rightarrow \mathbb{R}$  und den Anfangsbedingungen

$$v_i(t_0) = w_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ (} t_0 \in I \text{)}$$

vor. Dann lässt sich diese Gleichung lösen, indem man sukzessive unter Verwendung der zuvor gefundenen Lösungen die inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen in einer Variablen, nämlich

$$v_n' = a_{nn}(t)v_n + z_n(t) \text{ mit } v_n(t_0) = w_n,$$

$$v_{n-1}' = a_{n-1, n-1}(t)v_{n-1} + a_{n-1, n}(t)v_n(t) + z_{n-1}(t) \text{ mit } v_{n-1}(t_0) = w_{n-1},$$

$$v_{n-2}' = a_{n-2, n-2}(t)v_{n-2} + a_{n-2, n-1}(t)v_{n-1}(t) + a_{n-2, n}(t)v_n(t) + z_{n-2}(t) \text{ mit } v_{n-2}(t_0) = w_{n-2},$$

$\vdots$

$$v_1' = a_{11}(t)v_1 + a_{12}(t)v_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)v_n(t) + z_1(t) \text{ mit } v_1(t_0) = w_1,$$

löst.

*Beweis.* Das ist trivial. □

Die Lösungen eines solchen linearen Differentialgleichungssystems in oberer Dreiecksgestalt stehen also in Bijektion zu den Lösungen der  $n$  linearen inhomogenen Differentialgleichungen in einer Ortsvariablen, wobei die Störfunktionen jeweils mit den anderen Lösungen in der beschriebenen Weise zusammenhängen. Insbesondere übertragen sich Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen.

Auch wenn man ein homogenes System lösen möchte, so muss man in den Einzelschritten inhomogene Differentialgleichungen lösen.

BEISPIEL 41.9. Wir betrachten das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & t-1 \\ 0 & \frac{2t}{t^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für  $t > 0$ . Die zweite Zeile dieses Systems bedeutet

$$y' = \frac{2t}{t^2+1} \cdot y,$$

das ist eine homogene lineare Differentialgleichung in einer Variablen. Ihre Lösungen sind gemäß Satz 29.2 gleich

$$y(t) = c(t^2 + 1) = ct^2 + c$$

mit einem  $c \in \mathbb{R}$ . Die erste Zeile des Systems führt daher auf

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{t}x + (t-1)y \\ &= \frac{1}{t}x + c(t-1)(t^2+1) \\ &= \frac{1}{t}x + c(t^3 - t^2 + t - 1). \end{aligned}$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung in einer Variablen. Die zugehörige homogene Gleichung  $x' = \frac{1}{t}x$  besitzt  $t$  als eine Lösung. Nach Satz 29.10 müssen wir eine Stammfunktion von

$$c \frac{t^3 - t^2 + t - 1}{t} = c \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{t} \right)$$

finden, eine solche ist

$$c \left( \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln t \right) + d.$$

Daher ist

$$t \left( c \left( \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln t \right) + d \right) = \frac{c}{3}t^4 - \frac{c}{2}t^3 + ct^2 - ct \ln t + dt$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung. Also ist die allgemeine Lösung des Systems gleich

$$\begin{pmatrix} \frac{c}{3}t^4 - \frac{c}{2}t^3 + ct^2 - ct \ln t + dt \\ ct^2 + c \end{pmatrix}.$$



## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Euler method.png , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD

3