

Mathematik II

Zweite Testklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt, außer der folgenden Formel.

$$\int \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + 1} + \operatorname{arsinh} x).$$

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die erreichte Punktzahl geht zweifach in Ihre Übungspunktzahl ein.

Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
mögl. Pkt.:	4	4	4	4	10	10	6	9	6	7	64
erhalt. Pkt.:											

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

- (1) Eine *rektifizierbare* Kurve im \mathbb{R}^n .
- (2) Eine in einem Punkt *total differenzierbare* Abbildung.
- (3) Ein *regulärer Punkt* einer total differenzierbaren Abbildung.
- (4) Der *Tangentenraum* an die Faser durch einen Punkt einer total differenzierbaren Abbildung mit einem surjektiven totalen Differential.
- (5) Eine *symmetrische* Bilinearform.
- (6) Ein *vollständiger* metrischer Raum.
- (7) Eine *stark kontrahierende* Abbildung zwischen metrischen Räumen.
- (8) Eine *Fahne* in einem endlichdimensionalen Vektorraum.

Lösung

- (1) Man nennt eine Kurve

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

rektifizierbar, wenn die Kurvenlänge

$$L(f) = \sup (L(f(t_0), \dots, f(t_k))), a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k = b \text{ Unterteilung, } k \in \mathbb{N}$$

endlich ist.

- (2) Eine Abbildung $\varphi : G \rightarrow W$, wobei V und W endlichdimensionale \mathbb{K} -Vektorräume und $G \subseteq V$ offen ist, heißt *total differenzierbar* im Punkt $P \in G$, wenn es eine \mathbb{K} -lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + \|v\| r(v)$$

gibt, wobei $r : U(0, \delta) \rightarrow W$ eine in 0 stetige Abbildung mit $r(0) = 0$ ist und die Gleichung für alle $v \in V$ mit $P + v \in U(P, \delta) \subseteq G$ gilt.

- (3) Seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, sei $P \in G$ und sei

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine in P differenzierbare Abbildung. Dann heißt P ein *regulärer Punkt* von φ , wenn

$$\text{rang}(D\varphi)_P = \min(\dim(V), \dim(W))$$

ist.

- (4) Seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen und sei

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt, in dem das totale Differential $(D\varphi)_P$ surjektiv sei, und sei Y die Faser von φ durch P . Dann nennt man

$$T_P Y := \text{kern } (D\varphi)_P = \{v \mid (D\varphi)_P(v) = 0\}$$

den *Tangentenraum* an die Faser Y in P .

- (5) Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform. Die Bilinearform heißt *symmetrisch*, wenn

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

- (6) Ein metrischer Raum M heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in M konvergiert.
- (7) Es sei

$$f : L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M . Dann heißt f *stark kontrahierend*, wenn es eine nichtnegative reelle Zahl $c < 1$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in L$.

- (8) Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum der Dimension $n = \dim(V)$. Dann heißt eine Kette von Untervektorräumen

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine *Fahne* in V .

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto (3x^2 - 2xy - y^2 + 5x),$$

und entscheide, ob in diesen kritischen Punkten ein lokales Extremum vorliegt.

Lösung

Die Jacobi-Matrix dieser Funktion ist

$$(6x - 2y + 5, -2x - 2y).$$

Wir setzen beide Komponenten gleich 0 und erhalten durch Subtraktion der beiden Gleichungen voneinander die Bedingung

$$8x + 5 = 0,$$

also ist

$$x = -\frac{5}{8} \text{ und daher } y = \frac{5}{8}.$$

Der einzige kritische Punkt der Funktion ist also

$$P = \left(-\frac{5}{8}, \frac{5}{8}\right).$$

Wir bestimmen die Hesse-Matrix in diesem Punkt. Sie ist

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden das Minorenkriterium an. Der Eintrag links oben ist positiv, die Determinante ist $-12 - 4 = -16$, also negativ. Daher besitzt die Hesse-Form den Typ $(1, 1)$, und somit liegt kein lokales Extremum vor.

AUFGABE 3. (4 Punkte)

Berechne die Länge des Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - x + 13,$$

zwischen 4 und 8.

Lösung

Es ist $f'(x) = x - 1$. Daher ist die Länge des Graphen gleich dem Integral (mit der Substitution $u = x - 1$)

$$\begin{aligned} \int_4^8 \sqrt{1 + (x - 1)^2} dx &= \int_3^7 \sqrt{u^2 + 1} du \\ &= \frac{1}{2} (u\sqrt{u^2 + 1} + \operatorname{arsinh} u) \Big|_3^7 \\ &= \frac{1}{2} (7\sqrt{50} + \operatorname{arsinh} 7 - 3\sqrt{10} - \operatorname{arsinh} 3). \end{aligned}$$

AUFGABE 4. (4 Punkte)

Man gebe für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine bijektive, total differenzierbare Abbildung

$$\varphi_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

an, für die das totale Differential in mindestens einem Punkt nicht regulär ist.

Lösung

Für $n = 1$ ist die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3,$$

bijektiv (mit der Umkehrfunktion $x \mapsto \sqrt[3]{x}$). Für ein $n \in \mathbb{N}_+$ betrachten wir die Abbildung

$$\varphi_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto (x_1^3, x_2, \dots, x_n).$$

Dies ist eine polynomiale Abbildung, so dass das totale Differential durch die Jacobi-Matrix, also durch

$$\begin{pmatrix} 3x_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Für $x_1 = 0$ ist diese Matrix nicht invertierbar, da ihre Determinante 0 ist, und die Abbildung ist für diese Punkte nicht regulär. Dennoch ist die Abbildung bijektiv, die Umkehrabbildung wird durch

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto (\sqrt[3]{x_1}, x_2, \dots, x_n)$$

gegeben.

AUFGABE 5. (10 Punkte)

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ definierten Funktion

$$f : B(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^3 - y^2 - y.$$

Lösung

Wir bestimmen zunächst lokale Extrema auf dem offenen Innern der Kreisscheibe, indem wir die Funktion auf kritische Punkte untersuchen. Die Jacobi-Matrix von f ist

$$J = (2x, 3y^2 - 2y - 1).$$

Die kritischen Punkte liegen also bei $x = 0$ und $3y^2 - 2y - 1 = 0$ vor. Für die Gleichung $3y^2 - 2y - 1 = 0$ sind $y = 1$ und $y = -\frac{1}{3}$ die Lösungen, wobei der Punkt $P = (0, 1)$ nicht zum Innern (aber zum Rand) gehört, der Punkt $Q = (0, -\frac{1}{3})$ aber schon. Für Q bestimmen wir die Hesse-Matrix, diese ist allgemein

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y - 2 \end{pmatrix},$$

so dass sich für Q die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ergibt. Diese hat den Typ $(1, 1)$, so dass diese Matrix indefinit ist und kein lokales Extremum vorliegt. Daher liegen sämtliche lokalen und globalen Extrema auf dem Rand.

Die Funktion f lässt sich auf ganz \mathbb{R}^2 in natürlicher Weise ausdehnen (durch dieselben polynomialen Ausdrücke). Für den kritischen Punkt $P = (0, 1)$ ist die Hesse-Matrix gleich

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

welche positiv definit ist. Daher liegt in P ein lokales Minimum der ausgedehnten Funktion und damit erst recht ein lokales Minimum der auf der abgeschlossenen Kreisscheibe definierten Funktion vor.

Wir untersuchen nun den Rand auf weitere Extrema. Da die Funktion auf einer abgeschlossenen und beschränkten Menge definiert und stetig ist, muss es sowohl ein globales Minimum als auch ein globales Maximum geben. Der Rand ist durch

$$x^2 + y^2 = 1$$

gegeben. Daher gilt dort $x^2 = 1 - y^2$ und somit hängt die Funktion auf dem Rand nur von y ab, man kann daher

$$h(y) = f(x, y) = 1 - y^2 + y^3 - y^2 - y = y^3 - 2y^2 - y + 1$$

ansetzen, wobei y zwischen -1 und 1 läuft. Da ein lokales Extremum auf der abgeschlossenen Kreisscheibe insbesondere ein globales Extremum auf dem Rand sein muss, müssen wir zunächst die Nullstellen der Ableitung von h bestimmen. Diese ist $h'(y) = 3y^2 - 4y - 1$, und die Nullstellen davon sind

$$y = \pm \frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{2}{3}.$$

Dabei ist

$$\frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{2}{3} > 1$$

außerhalb des Intervalls, also nicht relevant für die Aufgabenstellung. Dagegen ist

$$\frac{-\sqrt{7} + 2}{3}$$

zwischen -1 und 1 . Da die zweite Ableitung in diesem Punkt negativ ist, liegt dort ein lokales Maximum auf dem Rand vor. Weiterhin sind noch die Randpunkte $y = 1$ und $y = -1$ des Intervalls zu berücksichtigen, dort müssen jeweils lokale Minima für $h(y)$ vorliegen.

Wir müssen dies jetzt auf die ursprüngliche Funktion auf der Kreisscheibe zurückübersetzen. Wir wissen schon, dass in $P = (0, 1)$ ein lokales Minimum vorliegt, und zwar mit dem Wert

$$f(0, 1) = -1.$$

Sei $S = (0, -1)$. Der Wert an dieser Stelle ist ebenfalls $f(0, -1) = -1$. Da diese beiden Punkte die einzigen Kandidaten für lokale Minima sind, müssen beide Punkte globale Minima sein.

Wir berechnen die x -Koordinaten zu $y = \frac{-\sqrt{7}+2}{3}$. Es ist

$$y^2 = \left(\frac{\sqrt{7}+2}{3}\right)^2 = \frac{11 - 4\sqrt{7}}{9},$$

also

$$1 - y^2 = \frac{-2 + 4\sqrt{7}}{9}$$

und somit

$$x = \pm \frac{\sqrt{4\sqrt{7} - 2}}{3}.$$

Die beiden Punkte $R_1 = \left(\frac{\sqrt{4\sqrt{7}-2}}{3}, \frac{-\sqrt{7}+2}{3}\right)$ und $R_2 = \left(\frac{-\sqrt{4\sqrt{7}-2}}{3}, \frac{-\sqrt{7}+2}{3}\right)$ sind die einzigen Kandidaten für lokale Maxima. Da es ein globales Maximum geben muss, und die Situation für diese beiden Punkte symmetrisch ist, muss in beiden Punkten ein globales Maximum vorliegen.

AUFGABE 6. (10 (1+9) Punkte)

- a) Formuliere den Banachschen Fixpunktsatz.
 b) Beweise die Existenzaussage im Banachschen Fixpunktsatz.

Lösung

a) Der Banachsche Fixpunktsatz besagt:

Es sei M ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum und

$$f : M \longrightarrow M$$

eine stark kontrahierende Abbildung. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

b) Sei $x \in M$ ein beliebiger Punkt. Wir betrachten die durch

$$x_0 = x \text{ und } x_n := f^n(x) := f(x_{n-1})$$

rekursiv definierte Folge in M . Wir setzen $a = d(f(x), x)$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq c \cdot d(f^n(x), f^{n-1}(x)) \leq c^n \cdot d(f(x), x) = c^n a.$$

Daher gilt aufgrund der Dreiecksungleichung und der geometrischen Reihe für $n \geq m$ die Beziehung

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^m(x)) &\leq d(f^n(x), f^{n-1}(x)) + d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) + \dots + d(f^{m+1}(x), f^m(x)) \\ &\leq a(c^{n-1} + c^{n-2} + \dots + c^{m+1} + c^m) \\ &= ac^m(c^{n-m-1} + c^{n-m-2} + \dots + c^2 + c^1 + 1) \\ &\leq c^m a \frac{1}{1-c}. \end{aligned}$$

Zu einem gegebenen $\epsilon > 0$ wählt man n_0 mit $c^{n_0} a \frac{1}{1-c} \leq \epsilon$. Dies zeigt, dass eine Cauchy-Folge vorliegt, die aufgrund der Vollständigkeit gegen ein $y \in M$ konvergiert.

Wir zeigen, dass dieses y ein Fixpunkt ist. Die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f(y)$, da eine kontrahierende Abbildung stetig ist. Andererseits stimmt diese Bildfolge mit der Ausgangsfolge bis auf die Indizierung überein, so dass der Grenzwert y sein muss.

AUFGABE 7. (6 (2+2+2) Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto \left(\frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x^2}\right).$$

- a) Bestimme die regulären Punkte der Abbildung φ .
 b) Zeige, dass φ in $P = (1, 2)$ lokal eine differenzierbare Umkehrabbildung $\psi = \varphi^{-1}$ besitzt, und bestimme das totale Differential von ψ im Punkt $\varphi(P)$.
 c) Man gebe alle Punkte $Q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ an, in denen φ nicht lokal invertierbar ist.

Lösung

- a) Wir bestimmen die Jacobi-Matrix von φ , diese ist

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & 2\frac{y}{x} \\ -2\frac{y^3}{x^3} & 3\frac{y^2}{x^2} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$-3\frac{y^4}{x^4} + 4\frac{y^4}{x^4} = \frac{y^4}{x^4}.$$

Dies ist 0 genau dann, wenn $y = 0$ ist, so dass die regulären Punkte genau die Punkte sind, deren y -Koordinate nicht 0 ist.

- b) Die Abbildung ist nach Teil a) im Punkt $P = (1, 2)$ regulär, daher gibt es nach dem Satz über die Umkehrabbildung eine differenzierbare Umkehrabbildung ψ , die in einer offenen Umgebung von $\varphi(P) = (4, 8)$ definiert ist. Das totale Differential von ψ im Punkt $\varphi(P)$ ist die inverse Matrix zum totalen Differential von φ in P , also invers zu

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -16 & 12 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix dazu ist

$$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 16 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

- c) Für die Punkte (x, y) mit $y \neq 0$ gibt es aufgrund des Satzes über die Umkehrabbildung lokal eine Umkehrabbildung. Für einen Punkt Q mit $y = 0$ gibt es dagegen keine lokale Umkehrabbildung, da ein solcher Punkt auf der Geraden liegt, die die Faser über $(0, 0)$ ist. Daher ist diese Abbildung in keiner offenen Umgebung von Q injektiv.

AUFGABE 8. (9 (2+2+5) Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (x^2 + y^2 + z^2, 2x + 3y + 4z).$$

- a) Bestimme die regulären Punkte der Abbildung φ . Zeige, dass $P = (1, -2, 1)$ regulär ist.
- b) Beschreibe für den Punkt $P = (1, -2, 1)$ den Tangentialraum an die Faser F von φ durch P .
- c) Man gebe für $P = (1, -2, 1)$ einen lokalen Diffeomorphismus zwischen einem offenen Intervall und einer offenen Umgebung von P in der Faser F durch P an.

Lösung

- a) Die Jacobi-Matrix der Abbildung ist

$$J = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix besitzt maximalen Rang, wenn die erste Zeile kein Vielfaches der zweiten Zeile ist. Die Bedingung lautet also

$$(x, y, z) = s(2, 3, 4), s \in \mathbb{R}.$$

D.h. die singulären Punkte der Abbildung sind die Punkte der von $(2, 3, 4)$ erzeugten Geraden. Der Punkt $P = (1, -2, 1)$ gehört nicht zu dieser Geraden, da $s(2, 3, 4) = (1, -2, 1)$ keine Lösung besitzt.

- b) Der Tangentialraum an F in P ist der Kern des totalen Differentials, also der Kern von

$$J = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung des Kerns muss man also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

lösen. Durch Subtraktion der beiden Zeilen folgt $7b + 2c = 0$ und daher ist der Tangentialraum gleich der Geraden

$$\{t(-11, -2, 7), t \in \mathbb{R}\}.$$

c) Der Punkt $P = (1, -2, 1)$ wird unter der Abbildung φ auf $(6, 0)$ abgebildet. Die Faser darüber wird durch die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \text{ und } 2x + 3y + 4z = 0$$

beschrieben. Wir lösen die lineare Gleichung nach x auf und setzen das Ergebnis

$$x = \frac{-3y - 4z}{2}$$

in die quadratische Gleichung ein. Das ergibt

$$\frac{9y^2 + 16z^2 + 24yz}{4} + y^2 + z^2 = 6$$

bzw.

$$13y^2 + 20z^2 + 24yz - 24 = 0.$$

Wir lösen dies nach z auf und erhalten zunächst

$$z^2 + \frac{6}{5}yz + \frac{13}{20}y^2 - \frac{6}{5} = 0$$

und durch quadratisches Ergänzen

$$\left(z + \frac{3}{5}y\right)^2 = \frac{9}{25}y^2 - \frac{13}{20}y^2 + \frac{6}{5} = -\frac{29}{100}y^2 + \frac{6}{5}.$$

Daraus ergibt sich

$$z = \pm \sqrt{-\frac{29}{100}y^2 + \frac{6}{5}} - \frac{3}{5}y.$$

Dabei ist die Wurzel für $-\sqrt{\frac{120}{29}} \leq y \leq \sqrt{\frac{120}{29}}$ und damit insbesondere für $y = -2$ definiert. Da für $y = -2$ ja $z = 1$ sein soll, muss man das negative Vorzeichen nehmen. Somit liefert die Abbildung

$$\left(-\sqrt{\frac{120}{29}}, \sqrt{\frac{120}{29}}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^3, y \longmapsto \left(\frac{-3y - 4\left(-\sqrt{-\frac{29}{100}y^2 + \frac{6}{5}} - \frac{3}{5}y\right)}{2}, y, -\sqrt{-\frac{29}{100}y^2 + \frac{6}{5}} - \frac{3}{5}y\right)$$

eine Bijektion dieses offenen Intervalls mit der offenen Teilmenge der Faser F durch P , die durch $F \cap \{(x, y, z) \mid -\sqrt{\frac{120}{29}} < y < \sqrt{\frac{120}{29}}\}$ gegeben ist. Es ist ein Diffeomorphismus, da diese Abbildung differenzierbar ist und ihre Ableitung wegen der zweiten Komponenten nirgendwo verschwindet.

AUFGABE 9. (6 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein Gradientenfeld und sei

$$\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

($J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = f(v)$. Es gelte $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Zeige, dass φ injektiv ist.

Lösung

Es sei

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein Potential zu f , also eine differenzierbare Funktion, deren Gradientenfeld gleich f ist. Wir zeigen, dass sogar die zusammengesetzte Abbildung

$$g = h \circ \varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto h(\varphi(t)),$$

injektiv ist. Aufgrund der Kettenregel ist die Ableitung dieser Abbildung gleich

$$g'(t) = (Dh)_{\varphi(t)} \circ (D\varphi)_t = (Dh)_{\varphi(t)}(\varphi'(t)).$$

Nach Fakt steht $\varphi'(t) \neq 0$ senkrecht auf dem Tangentialraum zu h im Punkt $\varphi(t)$. Insbesondere gehört $\varphi'(t)$ nicht zum Tangentialraum (da das Skalarprodukt positiv definit ist), also nicht zum Kern von $(Dh)_{\varphi(t)}$. Daher ist

$$g'(t) = (Dh)_{\varphi(t)}(\varphi'(t)) \neq 0.$$

D.h. dass $g'(t)$ keine Nullstelle besitzt und daher ist g nach Fakt streng wachsend oder streng fallend, also injektiv.

AUFGABE 10. (7 (5+2) Punkte)

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

Lösung

a) Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix. Das charakteristische Polynom davon ist

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -3 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5).$$

Daher sind 1 und 5 die Eigenwerte, und daher ist die Matrix diagonalisierbar. Zur Bestimmung eines Eigenvektors zum Eigenwert 1 berechnen wir den Kern von

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1 und damit die erste Fundamentallösung

$$e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung eines Eigenvektors zum Eigenwert 5 berechnen wir den Kern von

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 5 und damit die zweite Fundamentallösung

$$e^{5t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung hat demnach die Form

$$ae^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + be^{5t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^t + be^{5t} \\ -ae^t + 3be^{5t} \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

b) Um das Anfangsproblem zu lösen müssen wir a und b so bestimmen, dass

$$\begin{pmatrix} a + b \\ -a + 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ist. Dies ist ein lineares Gleichungssystem, Addition führt auf

$$4b = 9,$$

also $b = \frac{9}{4}$ und daher $a = -\frac{1}{4}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$-\frac{1}{4}e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{9}{4}e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$