Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 25

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Sei R ein Zahlbereich und sei $\mathfrak{f}$ ein gebrochenes Ideal $\neq 0$. Zeige unter Verwendung der Korrespondenz von Divisoren und gebrochenen Idealen, dass das inverse gebrochene Ideal $\mathfrak{f}^{-1}$ die Gestalt hat

$$\mathfrak{f}^{-1} = \{q \in Q(R) : \, q\mathfrak{f} \subseteq R\} \; .$$

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Sei $D < 0$ quadratfrei und A_D der zugehörige imaginär-quadratische Zahlbereich. Bestimme für $D \geq -12$ die Nichteinheiten $z \in A_D$ mit minimaler Norm.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Sei R ein Zahlbereich und sei angenommen, dass jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, eine Primfaktorzerlegung in R besitzt. Zeige, dass dann R bereits faktoriell ist.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Sei A_D ein quadratischer Zahlbereich und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal $\neq 0$ in A_D. Zeige, dass das konjugierte Ideal $\overline{\mathfrak{a}}$ in der Klassengruppe das Inverse zu $\mathfrak{a}$ ist.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Sei $D \neq 0, 1$ quadratfrei und A_D der zugehörige quadratische Zahlbereich. Sei p eine Primzahl, die in A_D nicht träge sei. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen.

(1) p besitzt eine Primfaktorzerlegung in A_D.
(2) p ist nicht irreduzibel (also zerlegbar) in A_D.
(3) p oder $-p$ ist die Norm eines Elementes aus A_D
(4) p oder $-p$ ist die Norm eines Primelementes aus A_D.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Sei R ein Zahlbereich und sei $f \in R$, $f \neq 0$. Es sei $(f) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k$ die Zerlegung in Primideale und es sei vorausgesetzt, dass f eine Primfaktorzerlegung besitzt. Zeige, dass die Primideale $\mathfrak{p}_i$ Hauptideale sind.

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Im quadratischen Zahlbereich $A_6 \cong \mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ gilt

$$2 \cdot 3 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \ .$$

Finde die Primfaktorzerlegungen (?) der beteiligten Faktoren und des Produktes.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Im quadratischen Zahlbereich $A_{-6} \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ gilt

$$-2 \cdot 3 = \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-6} \ .$$

Kann man diese Produkte weiter zerlegen, sind die beteiligten Faktoren prim?

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Sei $D \leq -2$ quadratfrei und betrachte $R = \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Zeige, dass die einzige Faktorisierung (bis auf Einheiten) von D gegeben ist durch

$$D = \sqrt{D}\sqrt{D} \ .$$

Zeige damit, dass $\sqrt{D}$ irreduzibel ist. Zeige ferner, dass falls $-D$ keine Primzahl ist, dann auch $\sqrt{D}$ nicht prim in R ist.

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Sei D quadratfrei und betrachte $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] \subseteq A_D$. Charakterisiere für die beiden Ringe, wann $\sqrt{D}$ prim ist.