Prof. Dr. H. Brenner, Dr. L. Katthän **Osnabrück SS 2014**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 11

Übungsaufgaben

Aufgabe 11.1. Zeige, dass der Ausdruck

$$\left(\alpha \frac{y}{x} \rightarrow \beta\right) \rightarrow (\exists x \alpha \rightarrow \beta)$$

keine Tautologie ist (auch nicht, wenn y weder in $\exists x \alpha$ noch in β frei vorkommt).

Aufgabe 11.2. Beweise aus der Existenzeinführung im Antezedens die *Alleinführung im Sukzedens.* Sie besagt, dass man aus

$$\vdash \beta \rightarrow \alpha \frac{y}{x}$$

unter der Bedingung, dass y weder in $\forall x \alpha$ noch in β frei vorkommt, auf

$$\vdash \beta \rightarrow \forall x \alpha$$

schließen kann.

Aufgabe 11.3. Zeige

$$\vDash \exists x (x = y)\,.$$

Aufgabe 11.4. Zeige

$$\vdash \exists x (x = y)\,.$$

Aufgabe 11.5. a) Zeige

$$\vdash \exists x (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \exists x \alpha \wedge \exists x \beta\,.$$

b) Zeige, dass

$$\exists x \alpha \wedge \exists x \beta \rightarrow \exists x (\alpha \wedge \beta)$$

keine Tautologie ist.

Die beiden folgenden Aufgaben sind vermutlich mühselig.

Aufgabe 11.6. Man gebe einen formalen Beweis für die Aussage, dass die Hintereinanderschaltung von zwei surjektiven Abbildungen auf einer Menge wieder surjektiv ist.

Aufgabe 11.7. Man gebe einen formalen Beweis für die Aussage, dass die Hintereinanderschaltung von zwei injektiven Abbildungen auf einer Menge wieder injektiv ist.

Aufgabe 11.8. Es sei Γ eine Ausdrucksmenge aus einer Sprache erster Stufe und α ein weiterer Ausdruck. Es sei α nicht aus Γ ableitbar. Zeige, dass man aus $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ keinen Widerspruch (also keinen Ausdruck der Form $\beta \wedge \neg\beta$) ableiten kann.

Aufgabe 11.9. Begründe die folgenden Ableitungsregeln (es seien s, t Terme, α, β Ausdrücke und Γ eine Ausdrucksmenge).

(1) Wenn $\Gamma \vdash s = t$, dann ist auch $\Gamma \vdash \alpha\frac{s}{x} \rightarrow \alpha\frac{t}{x}$,
(2) Wenn $\Gamma \vdash \alpha\frac{t}{x}$, dann ist auch $\Gamma \vdash \exists x\alpha$,
(3) Wenn $\Gamma \vdash \alpha\frac{y}{x} \rightarrow \beta$, dann ist auch $\Gamma \vdash \exists x\alpha \rightarrow \beta$, unter der Bedingung, dass y nicht frei in $\Gamma, \exists x\alpha, \beta$ vorkommt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 11.10. (2 Punkte)

Sei $\alpha \in L^S$. Zeige die Ableitbarkeit

$$\vdash \exists x \exists x \alpha \leftrightarrow \exists x \alpha\,.$$

Aufgabe 11.11. (4 Punkte)

Sei $\alpha \in L^S$. Zeige die Ableitbarkeit

$$\vdash \exists x \forall y \alpha \rightarrow \forall y \exists x \alpha\,.$$

Zeige, dass

$$\forall y \exists x \alpha \rightarrow \exists x \forall y \alpha$$

nicht ableitbar ist.

Aufgabe 11.12. (4 Punkte)

Formuliere mit dem zweistelligen Funktionssymbol $\cdot$ die Aussage, dass wenn eine Zahl a die Zahl b teilt und b die Zahl c teilt, dass dann a auch c teilt.

Erstelle eine Ableitung für diese Aussage.

Aufgabe 11.13. (3 Punkte)

Zeige, dass es eine Ausdrucksmenge Γ mit der Eigenschaft gibt, dass für jede Interpretation I genau dann $I \vDash \Gamma$ gilt, wenn die Grundmenge der Interpretation unendlich ist.