

Mathematik III**Arbeitsblatt 66****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 66.1. Es seien $(M_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ -endliche Maßräume, es seien (N_1, \mathcal{B}_1) und (N_2, \mathcal{B}_2) zwei Messräume und es seien

$$\varphi_1 : M_1 \longrightarrow N_1$$

und

$$\varphi_2 : M_2 \longrightarrow N_2$$

zwei messbare Abbildungen, unter denen die Bildmaße $(\varphi_1)_*\mu_1$ und $(\varphi_2)_*\mu_2$ σ -endlich seien. Zeige, dass für das Bildmaß unter der Produktabbildung $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ die Gleichung

$$\varphi_*(\mu_1 \otimes \mu_2) = ((\varphi_1)_*\mu_1) \otimes ((\varphi_2)_*\mu_2)$$

gilt.

AUFGABE 66.2. Wir betrachten die beiden Rechtecke

$$Q = [-1, 2] \times [1, 4] \text{ und } L = [1, 5] \times [3, 6]$$

im \mathbb{R}^2 . Schreibe den Durchschnitt und die Differenzmengen als disjunkte Vereinigung von Rechtecken. Schreibe die Vereinigung der beiden Mengen auf mehrere Arten als disjunkte Vereinigung von Rechtecken. Welche Darstellung ist eine Verfeinerung einer anderen Darstellung? Wie sieht ein „Raster“ aus, mit dem man alle beteiligten Mengen ausdrücken kann? Bestätige, dass die Summe der beteiligten Rechteckinhalte stets gleich ist.

AUFGABE 66.3. Zeige, dass das durch die drei Punkte $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 0)$ gegebene abgeschlossene Dreieck nicht zum Produktpräring von $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ und $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ gehört.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 66.4. (5 Punkte)

Zeige, dass die offene Einheitskreisscheibe nicht zum Produktpräring von $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ und $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ gehört.

AUFGABE 66.5. (4 Punkte)

Es sei T die Vereinigung der drei Quader

$$Q_1 = [2, 7] \times [1, 3], Q_2 = [1, 4] \times [2, 5] \text{ und } Q_3 = [3, 6] \times [4, 6]$$

im \mathbb{R}^2 . Bestimme

$$T(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in T\}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ und

$$T^a = \{x \in \mathbb{R} \mid \lambda(T(x)) = a\}$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$ (dabei ist λ einfach die Summe der Länge der disjunkten Intervalle, aus denen sich $T(x)$ zusammensetzt).

Einen Maßraum mit dem Gesamtmaß 1 nennt man einen Wahrscheinlichkeitsraum. Für die Wahrscheinlichkeitstheorie ist das folgende Konzept enorm wichtig.

Es sei (M, \mathcal{E}, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Man nennt zwei σ -Algebren $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$ *unabhängig*, wenn für jedes $A \in \mathcal{A}$ und jedes $B \in \mathcal{B}$ die Gleichheit

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$$

gilt.

AUFGABE 66.6. (4 Punkte)

Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Wahrscheinlichkeitsräume und $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ ihr Produktraum. Zeige, dass die „Zylinderalgebren“

$$\mathcal{Z}_1 = \{S \times \Omega_2 \mid S \in \mathcal{A}_1\} \text{ und } \mathcal{Z}_2 = \{\Omega_1 \times T \mid T \in \mathcal{A}_2\}$$

unabhängig sind.

Aufgabe zum Hochladen

AUFGABE 66.7. (8 Punkte)

Man schreibe eine Animation, die die Unabhängigkeit des Maßes von der Quaderzerlegung im Beweis zu Lemma 66.3 (1) am Beispiel des \mathbb{R}^2 deutlich macht. Insbesondere soll die Einführung eines Rasters und der Begriff der Verfeinerung sichtbar werden.