Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 6

Aufgaben zur Mächtigkeit

Aufgabe 6.1. Es seien L und M zwei Mengen und

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

eine bijektive Abbildung zwischen diesen Mengen. Zeige, dass für jede Teilmenge $S \subseteq L$ eine Bijektion

$$S \longrightarrow \varphi(S)$$

vorliegt, und dass ebenso für jede Teilmenge $T \subseteq M$ eine Bijektion

$$\varphi^{-1}(T) \longrightarrow T$$

vorliegt.

Aufgabe 6.2. Es sei M eine Menge und $\mathfrak{P}\,(M)$ die Potenzmenge davon. Zeige, dass durch die Gleichmächtigkeit von Mengen eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{P}\,(M)$ definiert wird.

Aufgabe 6.3. Es sei M eine Menge und $\mathfrak{P}\,(M)$ die Potenzmenge davon. Zeige, dass durch

$$S \preccurlyeq T, \text{wenn es eine injektive Abbildung } S \to T \text{ gibt}\,,$$

eine reflexive und transitive Relation auf $\mathfrak{P}\,(M)$ definiert wird, die in aller Regel weder symmetrisch noch antisymmetrisch ist.

Aufgabe 6.4. Definiere eine bijektive Abbildung zwischen den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 6.5. Man gebe ein Beispiel für eine surjektive Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass jeder Wert $y \in \mathbb{R}$ unendlich oft angenommen wird.

Aufgaben zu endlichen Mengen

Die folgenden Aufgaben über endliche Mengen sind intuitiv klar. Es geht aber darum, sie unter Bezug auf die Definitionen mit Hilfe von bijektiven Abbildungen zu beweisen.

Aufgabe 6.6. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ und $x \in \{1, \ldots, n\}$. Zeige, dass die Menge

$$\{1, \ldots, n\} \setminus \{x\}$$

die Anzahl $n - 1$ besitzt.

Aufgabe 6.7. Es seien m und n natürliche Zahlen. Zeige durch Induktion über m, dass aus einer Bijektion

$$\varphi : \{1, \ldots, m\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$$

folgt, dass $m = n$ ist.

Aufgabe 6.8. Es sei M eine endliche Menge. Zeige, dass die Anzahl von M wohldefiniert ist.

Aufgabe 6.9. Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T ebenfalls eine endliche Menge ist, und dass für ihre Anzahl k die Abschätzung

$$k \leq m$$

gilt. Zeige ferner, dass T genau dann eine echte Teilmenge ist, wenn

$$k < m$$

ist.

Aufgabe 6.10. Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und es sei

$$M \longrightarrow N$$

eine surjektive Abbildung in eine weitere Menge N. Zeige, dass dann auch N endlich ist, und dass für ihre Anzahl n die Abschätzung

$$n \leq m$$

gilt.

Aufgabe 6.11. Sei $T \subseteq \mathbb{N}$ eine nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen. Zeige, dass T genau dann endlich ist, wenn T ein Maximum besitzt.

Aufgabe 6.12. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt man im Lotto „Sechs aus Neunundvierzig“?

Aufgabe 6.13. Es seien M und N zwei disjunkte endliche Mengen. Zeige, dass die Anzahl der (disjunkten) Vereinigung $M \cup N$ gleich der Summe der beiden Anzahlen der beiden Mengen ist.

Aufgabe 6.14. Es seien M und N endliche Mengen. Zeige, dass die Produktmenge $M \times N$ ebenfalls endlich ist, und dass die Beziehung

$$\#(M \times N) = \#(M) \cdot \#(N)$$

gilt.

In den drei folgenden Aufgaben bezeichen wir mit S_n die Menge der bijektiven Abbildungen von $\{1, \ldots, n\}$ in sich selbst.[1]

Aufgabe 6.15. Zeige, dass durch die Zuordnung

$$S_n \times \{1, \ldots, n+1\} \longrightarrow S_{n+1},\ (\varphi, x) \longmapsto \tilde{\varphi}$$

mit

$$\tilde{\varphi}(k) = \begin{cases} \varphi(k) \text{ für } k \leq n \text{ und } \varphi(k) < x \\ \varphi(k) + 1 \text{ für } k \leq n \text{ und } \varphi(k) \geq x \\ x \text{ für } k = n+1 \end{cases}$$

eine wohldefinierte bijektive Abbildung gegeben ist.

Aufgabe 6.16. Zeige, dass

$$\#(S_n) = n!$$

gilt.

Aufgabe 6.17. Es sei M eine n-elementige Menge und sei

$$B = \{F : M \to M \text{ Abbildung} : F \text{ bijektiv}\}.$$

Zeige, dass

$$\#(B) = \#(S_n) = n!$$

ist.

[1]In diesen drei Aufgaben beweisen wir, dass man eine n-elementige Menge auf $n!$ verschiedene Weisen anordnen kann. Der Aufwand mag angesichts der simplen Idee, dass es für das erste Element n Möglichkeiten gibt, für das zweite $n-1$ Möglichkeiten usw. unangemessen hoch erscheinen. Dies beruht eben darauf, dass wir einen präzisen Beweis geben, der auf einer präzisen Definition der Anzahl aufbaut. Es sei aber hier schon ausdrücklich erwähnt, dass allgemein in der höheren Mathematik dieses Missverhältnis zwischen einer (detaillierten) Beweisidee und deren Übersetzung in einen korrekten Beweis nicht herrscht.

AUFGABE 6.18. Es seien M und N zwei endliche Teilmengen einer Menge G. Zeige, dass die Formel

$$\#(M) + \#(N) = \#(M \cup N) + \#(M \cap N)$$

gilt.

AUFGABE 6.19. Es sei G eine Menge und es seien $M_i \subseteq G$, $i = 1, \ldots, n$, endliche Teilmengen. Für eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei

$$M_J = \bigcap_{i \in J} M_i \,.$$

Finde eine Beziehung zwischen den Anzahlen der verschiedenen Schnittmengen M_J, $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Beweise diese Formel.

AUFGABE 6.20. Es sei $(I, \leq)$ eine total geordnete Menge. Zeige durch Induktion, dass jede nichtleere endliche Teilmenge $T \subseteq I$ ein eindeutiges Maximum besitzt.