Studienvorkurs Mathematik

Prof. Dr. Holger Brenner

Wintersemester 2013/2014

Inhaltsverzeichnis

1.	Vorlesung	3
1.	Arbeitsblatt	9
2.	Vorlesung	11
2.	Arbeitsblatt	16
3.	Vorlesung	19
3.	Arbeitsblatt	26
4.	Vorlesung	31
4.	Arbeitsblatt	38
5.	Vorlesung	41
5.	Arbeitsblatt	47
Abbildungsverzeichnis		50

1. Vorlesung

Ganze Zahlen und Rechengesetze

Wir arbeiten mit den folgenden Mengen, deren Kenntnis wir voraussetzen.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\},$$

die Menge der *natürlichen Zahlen* (mit der 0).

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\},$$

die Menge der *ganzen Zahlen*.

Diese Mengen sind mit den natürlichen Operationen Addition und Multiplikation versehen, an deren Eigenschaften wir erinnern.

Die Addition auf $\mathbb{Z}$ erfüllt die folgenden Eigenschaften.

(1) Es ist
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
für beliebige (alle) Zahlen $a, b, c, \in \mathbb{Z}$, d.h. die Addition ist *assoziativ*.

(2) Es ist
$$a + b = b + a$$
für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, d.h. die Addition ist *kommutativ*.

(3) Es gilt
$$a + 0 = a$$
für jedes $a \in \mathbb{Z}$ (man sagt, dass 0 das *neutrale Element* der Addition ist).

(4) Zu jedem $a \in \mathbb{Z}$ besitzt $-a$ die Eigenschaft
$$a + (-a) = 0$$
(man sagt, dass $-a$ das *negative Element* zu a ist).

Die Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ erfüllt die folgenden Eigenschaften.

(1) Es ist
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
für beliebige (alle) Zahlen $a, b, c, \in \mathbb{Z}$, d.h. die Multiplikation ist *assoziativ*.

(2) Es ist
$$a \cdot b = b \cdot a$$
für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, d.h. die Multiplikation ist *kommutativ*.

(3) Es gilt
$$a \cdot 1 = a$$
für jedes $a \in \mathbb{Z}$ (man sagt, dass 1 das *neutrale Element* der Multiplikation ist).

Man spricht auch vom Assoziativgesetz der Addition u.s.w.. Addition und Multiplikation sind durch das sogenannte *Distributivgesetz* miteinander verbunden. Dieses besagt

$$a \cdot (b + c) \;=\; (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

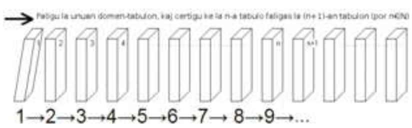
Wir erinnern an einige weitere Begriffe. Man sagt, dass eine ganze Zahl a eine ganze Zahl b *teilt* (oder dass a ein *Teiler* von b ist oder dass b ein *Vielfaches* von a ist), wenn es eine weitere ganze Zahl c gibt mit $b = ac$. Beispielsweise ist 3 ein Teiler von 15, aber 2 ist kein Teiler von 15. Eine *gerade Zahl* ist eine ganze Zahl, die ein Vielfaches von 2 ist, eine *ungerade Zahl* ist eine ganze Zahl, die kein Vielfaches von 2 ist. Wenn a ein Teiler von b ist, so verwenden wir die Bezeichnung $\frac{a}{b}$ für diejenige (eindeutig bestimmte) ganze Zahl c, für die die Gleichheit $b = ac$ gilt.

Auf den ganzen Zahlen ist auch die *Größer/Gleich-Beziehung* (oder *Ordnungsbeziehung*) definiert. Man schreibt $a \geq b$, wenn a mindestens so groß wie b ist. Eine ganze Zahl a ist genau dann eine natürliche Zahl, wenn $a \geq 0$ ist. Die Beziehung $a \geq b$ gilt genau dann, wenn es eine natürliche Zahl c mit $a = b + c$ gibt. Für die Ordnungsbeziehung gelten die folgenden Regeln, und zwar für beliebige ganze Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

(1) Es ist $a \geq a$ (dies nennt man die *Reflexivität* der Ordnung).
(2) Aus $a \geq b$ und $b \geq c$ folgt $a \geq c$ (dies nennt man die *Transitivität* der Ordnung).
(3) Aus $a \geq b$ und $b \geq a$ folgt $a = b$ (dies nennt man die *Antisymmetrie* der Ordnung).
(4) Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ (dies nennt man die *Additivität* der Ordnung).
(5) Aus $a \geq b$ und $c \in \mathbb{N}$ folgt $c \cdot a \geq c \cdot b$ (dies nennt man die *Multiplikativität* der Ordnung).
(6) Aus $a \geq b$ und $c \in \mathbb{Z}_-$ (also c negativ) folgt $c \cdot a \leq c \cdot b$.

Bei der Multiplikation mit einer negativen Zahl dreht sich also die Ordnungsbeziehung um.

Induktion



Mathematische Aussagen, die von natürlichen Zahlen abhängen, können mit dem Beweisprinzip der *vollständigen Induktion* bewiesen werden. Die folgende Aussage präzisiert und begründet dieses Prinzip.

Satz 1.1. *Für jede natürliche Zahl n sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte*

(1) *$A(0)$ ist wahr.*
(2) *Für alle n gilt: wenn $A(n)$ gilt, so ist auch $A(n+1)$ wahr.*

Dann gilt $A(n)$ für alle n.

Beweis. Es sei

$$M = \{n \in \mathbb{N} | \, A(n) \text{ ist wahr}\} .$$

Wir wollen zeigen, dass $M = \mathbb{N}$ ist, denn genau dies bedeutet, dass die Aussage für alle n gilt. Nach der ersten Bedingung ist

$$0 \in M .$$

Nach der zweiten Voraussetzung gilt für M, dass aus $n \in M$ stets $n+1 \in M$ folgt. Damit enthält M die 0, daher die 1, daher die 2, usw., und damit überhaupt alle natürlichen Zahlen. $\square$

Der Nachweis von (der Gültigkeit von) $A(0)$ heißt dabei der *Induktionsanfang* und der Schluss von $A(n)$ auf $A(n+1)$ heißt der *Induktionsschluss*. Innerhalb des Induktionsschlusses nennt man die Gültigkeit von $A(n)$ auch die *Induktionsvoraussetzung*. In manchen Situationen ist die Aussage $A(n)$ erst für $n \geq n_0$ für ein gewisses n_0 (definiert oder) wahr. Dann beweist man im Induktionsanfang die Aussage $A(n_0)$ und den Induktionsschluss führt man für alle $n \geq n_0$ durch.

Das folgende Standardbeispiel für einen Induktionsbeweis verwendet das *Summenzeichen*. Für gegebene reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ bedeutet

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \; := \; a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Dabei hängen im Allgemeinen die a_k in einer formelhaften Weise von k ab. Entsprechend ist das *Produktzeichen* definiert, nämlich

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \; := \; a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n.$$

Insbesondere sind für $n \in \mathbb{N}$ die *Potenzen* durch

$$a^n \; = \; \prod_{i=1}^{n} a \; = \; a^{n-1} \cdot a \; = \; \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{mal}}$$

definiert. Dabei gelten die Konventionen $0a = 0$ und $a^0 = 1$ (die erste lässt sich auch über die Multiplikation begründen, die zweite ist aber auch sinnvoll). Als Rechenregeln für das Potenzieren gelten

(1)
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$
(2)
$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$
(3)
$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

Aufgabe 1.2. Beweise durch Induktion die folgende Formel für $n \geq 1$.
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Lösung

Beim Induktionsanfang ist $n = 1$, daher besteht die Summe links nur aus einem Summanden, nämlich der 1, und daher ist die Summe 1. Die rechte Seite ist $\frac{1\cdot 2}{2} = 1$, so dass die Formel für $n = 1$ stimmt.

Für den Induktionsschritt setzen wir voraus, dass die Formel für ein $n \geq 1$ gilt, und müssen zeigen, dass sie auch für $n+1$ gilt. Dabei ist n beliebig. Es ist
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n + 1\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1\\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}.\end{aligned}$$
Dabei haben wir für die zweite Gleichheit die Induktionsvoraussetzung verwendet. Der zuletzt erhaltene Term ist die rechte Seite der Formel für $n+1$, also ist die Formel bewiesen.

Aussagen, die durch Induktion bewiesen werden können, können manchmal auch auf andere Art bewiesen werden. Im vorstehenden Beispiel gibt es die elegantere und einsichtigere Lösung, die Zahlen einmal aufsteigend und einmal absteigend untereinander hinzuschreiben, also
$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{array}$$
Spaltenweise ergibt sich $n+1$, und diese Summe kommt n-mal vor. Also ist
$$2\left(\sum_{i=1}^{n}\right) = n\,(n+1)\,.$$

Aufgabe 1.3. Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Lösung

Für $n = 0$ ist

$$6^2 + 7 = 43$$

ein Vielfaches von 43. Sei nun die Aussage für n bewiesen und betrachten wir den Ausdruck für $n + 1$. Dieser ist

$$\begin{aligned} 6^{n+1+2} + 7^{2(n+1)+1} &= 6 \cdot 6^{n+2} + 7^2 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 6^{n+2} + (6 + 43)7^{2n+1} \\ &= 6(6^{n+2} + 7^{2n+1}) + 43 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 43 \cdot s + 43 \cdot 7^{2n+1}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde (nämlich die Eigenschaft, dass $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ ein Vielfaches von 43 ist). Daher ist diese Zahl ein Vielfaches von 43.

Division mit Rest

Jede natürliche Zahl lässt sich bekanntlich als eine Ziffernfolge „im Zehnersystem“ ausdrücken. Dies beruht auf der (sukzessiven) Division mit Rest.

Satz 1.4. *Sei d eine fixierte positive natürliche Zahl. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl n eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl q und eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl*[1] *r, $0 \leq r \leq d - 1$, mit*

$$n = qd + r.$$

Beweis. Zur Existenz. Dies wird durch Induktion über n bewiesen. Es sei $d > 0$ fixiert. Der Induktionsanfang ergibt sich direkt mit $q = 0$ und $r = n = 0$. Für den Induktionsschluss sei die Aussage für n bewiesen, d.h. wir haben eine Darstellung $n = dq + r$ mit $r < d$ und müssen eine ebensolche Darstellung für $n + 1$ finden. Wenn $r < d - 1$ ist, so ist

$$n + 1 = dq + r + 1$$

und wegen $r+1 < d$ ist dies eine gesuchte Darstellung. Ist hingegen $r = d-1$, so ist

$$n + 1 = dq + r + 1 = dq + d = d(q + 1) + 0,$$

und dies ist eine gesuchte Darstellung. Zur Eindeutigkeit. Sei $qd + r = n = \tilde{q}d+\tilde{r}$, wobei die Bedingungen jeweils erfüllt seien. Es sei ohne Einschränkung $\tilde{r} \geq r$. Dann gilt $(q-\tilde{q})d = \tilde{r}-r$. Diese Differenz ist nichtnegativ und kleiner

[1] Bei q denke man an Quotient und bei r an Rest.

als d, links steht aber ein Vielfaches von d, so dass die Differenz 0 sein muss und die beiden Darstellungen überein stimmen. $\square$

Mit der Division mit Rest können wir die Existenz und Eindeutigkeit der üblichen Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl beweisen. Hinter der Zifferndarstellung verbirgt sich eine Mischung aus Addition, Multiplikation und Potenzierung.

Satz 1.5. *Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen k und $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_k$ mit $0 \leq r_i \leq 9$ und mit $r_k \neq 0$ (außer bei $n = 0$) mit der Eigenschaft*

$$n = \sum_{i=0}^{k} r_i 10^i.$$

Beweis. Wir beweisen die Existenzaussage durch Induktion über n. Für $n = 0$ wählt man $k = 0$ und $r_0 = 0$. Sei nun $n \geq 1$ und die Aussage für kleinere Zahlen schon bewiesen. Nach Satz 1.4 mit $d = 10$ gibt es eine Darstellung

$$n = q \cdot 10 + r_0$$

mit r_0 zwischen 0 und 9. Es ist $q < n$, deshalb gilt nach Induktionsvoraussetzung die Aussage für q. D.h. man kann schreiben

$$q = \sum_{i=0}^{\ell} s_i 10^i$$

mit $0 \leq s_i \leq 9$ (bei $q = 0$ ist dies als leere Summe zu lesen) und mit $s_\ell \neq 0$. Daher ist

$$\begin{aligned} n &= q \cdot 10 + r_0 \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\ell} s_i 10^i \right) \cdot 10 + r_0 \\ &= \sum_{i=0}^{\ell} \left(s_i 10^{i+1} \right) + r_0 \\ &= \sum_{j=1}^{\ell+1} \left(s_{j-1} 10^j \right) + r_0 \end{aligned}$$

eine Darstellung der gesuchten Art. Dabei ist $r_j = s_{j-1}$ für $j \geq 1$ und $k = \ell + 1$. Die Eindeutigkeit folgt ebenfalls aus der Eindeutigkeit bei der Division mit Rest. $\square$

Eine entsprechende Aussage gilt für jede Basis $g \geq 2$ statt $g = 10$. Bei $g = 2$ spricht man vom *Dualsystem*, die einzigen Ziffern sind 0 und 1, bei $g = 3$ vom *Dreiersystem* mit den Ziffern $0, 1, 2$ u.s.w.. Bei $g = 16$ spricht man vom *Hexadezimalsystem* und verwendet die Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$.

1. Arbeitsblatt

Übungsaufgaben[2]

Aufgabe 1.1. Beweise durch Induktion die folgenden Formeln.

(1)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,,$$

(2)
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,,$$

(3)
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

Aufgabe 1.2. Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 1.3.*

Zeige mittels vollständiger Induktion die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ bei } n \text{ gerade}, \\ -\frac{n+1}{2} \text{ bei } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Aufgabe 1.4.*

Beweise durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} .$$

Aufgabe 1.5. Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme $n = 3$ die Beziehung

$$2^n \geq n^2$$

gilt.

[2] Eine Aufgabe mit Stern bedeutet, dass es dazu eine Lösung gibt, die über einen Link zu erreichen ist.

Aufgabe 1.6. Die Städte $S_1, \ldots, S_n$ seien untereinander durch Straßen verbunden und zwischen zwei Städten gibt es immer genau eine Straße. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Straßen nur in einer Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen Städte erreichbar sind.

Aufgabe 1.7.*

Zeige, dass für jede ungerade Zahl n die Zahl $25n^2 - 17$ ein Vielfaches von 8 ist.

Aufgabe 1.8. Welche Teilerbeziehung besteht zwischen 0 und einer beliebigen ganzen Zahl n und welche Teilerbeziehung besteht zwischen 1 und einer beliebigen ganzen Zahl n.

Aufgabe 1.9. Es seien $q, d, s \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 1$ und $n = qd + s$. Zeige, dass der Rest von n bei Division durch d gleich dem Rest von s bei Division durch d ist.

Aufgabe 1.10. Sei d eine positive natürliche Zahl. Es seien a, b natürliche Zahlen und es seien r bzw. s die Reste von a bzw. b bei Division durch d. Zeige, dass der Rest von $a + b$ bei Division durch d gleich dem Rest von $r + s$ bei Division durch m ist. Formuliere und beweise die entsprechende Aussage für die Multiplikation.

Bei der folgenden Aufgabe denke man etwa an $a = 10$.

Aufgabe 1.11. Es seien $a, d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$. Zeige, dass bei Division mit Rest durch d aller Potenzen von a (also $a^0, a^1, a^2, \ldots$) schließlich eine Periodizität eintreten muss. Es gibt also $i < j$ derart, dass sich die Reste von $a^i, a^{i+1}, a^{i+2}, \ldots, a^{j-2}, a^{j-1}$ bei den folgenden Potenzen periodisch (oder „zyklisch“) wiederholen (insbesondere besitzen also a^i und a^j den gleichen Rest). Zeige ebenfalls, dass diese Periodizität nicht bei $a^0 = 1$ anfangen muss.

Aufgabe 1.12. Betrachte im Zehnersystem die Zahl

$$473\,.$$

Wie sieht diese Zahl im Dualsystem aus?

Aufgabe 1.13. Begründe, ohne auf Gewohnheiten zu verweisen, warum das *schriftliche Addieren* (von natürlichen Zahlen im Zehnersystem) korrekt ist, also wirklich die Summe der vorgegebenen Zahlen berechnet.

Aufgabe 1.14. Begründe, ohne auf Gewohnheiten zu verweisen, warum das *schriftliche Multiplizieren* (von natürlichen Zahlen im Zehnersystem) korrekt ist, also wirklich das Produkt der vorgegebenen Zahlen berechnet.

Aufgabe 1.15. Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeige durch Induktion die Gleichheit

$$(2m+1)\prod_{i=1}^{m}(2i-1)^2 = \prod_{k=1}^{m}(4k^2-1)\,.$$

Aufgabe 1.16. Eine n-Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch $a-1$ Längsrillen und $b-1$ Querrillen in $n = a \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{N}_+)$ mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechtecken besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer n-Schokolade aus genau $n-1$ Teilungsschritten besteht.

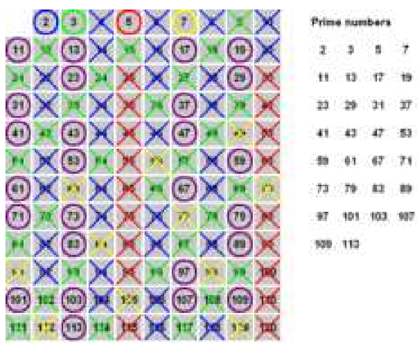
Aufgabe 1.17. Betrachte im 15er System mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 8, 9, A, B, C, D, E$ die Zahl

$$5E6BB\,.$$

Wie sieht diese Zahl im Zehnersystem aus?

2. Vorlesung

Primzahlen



Das *Sieb des Eratosthenes* liefert eine einfache Methode, eine Liste von Primzahlen unterhalb einer bestimmten Größe k zu erstellen. Man streicht einfach die echten Vielfachen der kleinen (kleiner als oder gleich $\sqrt{k}$) schon etablierten Primzahlen durch, die verbleibenden Zahlen sind prim.

Definition 2.1. Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ heißt eine *Primzahl*, wenn die einzigen natürlichen Teiler von ihr 1 und n sind.

Eine Primzahl ist also eine natürliche Zahl, die genau zwei Teiler hat, nämlich 1 und n, und die müssen verschieden sein. 1 ist also keine Primzahl.

Die ersten Primzahlen sind $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$.

Satz 2.2. *Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, besitzt eine Zerlegung in Primfaktoren.*

D.h. es gibt eine Darstellung

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$$

mit Primzahlen p_i.

Beweis. Wir beweisen die Existenz durch Induktion über n. Für $n = 2$ liegt eine Primzahl vor. Bei $n \geq 3$ ist entweder n eine Primzahl, und diese bildet die Primfaktorzerlegung, oder aber n ist keine Primzahl. In diesem Fall gibt es eine nichttriviale Zerlegung $n = ab$ mit kleineren Zahlen $a, b < n$. Für diese Zahlen gibt es nach Induktionsvoraussetzung jeweils eine Zerlegung in Primfaktoren, und diese setzen sich zu einer Primfaktorzerlegung für n zusammen. □

Für 105 beispielsweise findet man den Primfaktor 3 und kann daher $105 = 3 \cdot 35$ schreiben. Von der kleineren Zahl 35 ist die Zerlegung $35 = 5 \cdot 7$ nach Induktionsvoraussetzung schon bekannt und man erhält

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Wenn man mit dem Primfaktor 5 startet, so ergibt sich $105 = 5 \cdot 21 = 5 \cdot 3 \cdot 7$, insgesamt kommen also die gleichen Primfaktoren vor. Weiter unten werden wir zeigen, dass die Primfaktorzerlegung bis auf Reihenfolge eindeutig ist, was keineswegs selbstverständlich ist und einige Vorbereitungen bedarf.

Satz 2.3. *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis. Angenommen, die Menge aller Primzahlen sei endlich, sagen wir $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ sei eine vollständige Auflistung aller Primzahlen. Man betrachtet die natürliche Zahl

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_r + 1 .$$

Da bei Division von N durch p_i immer der Rest 1 übrigbleibt, ist diese Zahl durch keine der Primzahlen p_i teilbar. Andererseits besitzt N nach Satz 2.2 eine Primfaktorzerlegung. Insbesondere gibt es eine Primzahl p, die N teilt (dabei könnte $N = p$ sein). Doch damit muss p gleich einem der p_i aus der Liste sein, und diese sind keine Teiler von N. Dies ist ein Widerspruch, da ein p_i nicht gleichzeitig ein Teiler und kein Teiler von N sein kann. Also muss die Annahme (nämlich die Endlichkeit der Primzahlmenge) falsch gewesen sein. □

Teilerfremdheit

Definition 2.4. Zwei natürliche Zahlen heißen *teilerfremd*, wenn sie keinen gemeinsamen Teiler ≥ 2 besitzen.

Beispielsweise sind 12 und 25 teilerfremd, 15 und 25 sind nicht teilerfremd, da 5 ein gemeinsamer Teiler ist. Die 1 ist zu jeder natürlichen Zahl (auch zu 0 und 1) teilerfremd. Für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl n gilt folgende Alternative: Entweder teilt p die Zahl n, oder aber p und n sind teilerfremd. Ein gemeinsamer Teiler muss ja ein Teiler von p sein, und da kommen nur 1 und p in Frage.

Aufgabe 2.5. Die Wasserspedition „Alles im Eimer" verfügt über einen 7- und einen 10-Liter-Eimer, die allerdings keine Markierungen haben. Sie erhält den Auftrag, insgesamt genau einen Liter Wasser von der Nordsee in die Ostsee zu transportieren. Kann sie diesen Auftrag erfüllen?

Die Aufgabe ist lösbar: Man macht fünfmal den 10-Liter-Eimer in der Nordsee voll und transportiert dies in die Ostsee. Danach (oder gleichzeitig) macht man siebenmal den 7-Liter-Eimer in der Ostsee voll und transportiert dies in die Nordsee. Unterm Strich hat man dann $5 \cdot 10 - 7 \cdot 7 = 1$ Liter transportiert. Die dieser Überlegung zugrunde liegende Aussage heißt *Lemma von Bezout.*

Satz 2.6. *Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ zwei teilerfremde natürliche Zahlen. Dann gibt es ganze Zahlen $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $ra + sb = 1$.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über das Maximum von a und b, wobei wir ohne Einschränkung $a \leq b$ wählen können. Wenn das Maximum 0 ist, so sind beide Zahlen 0 und somit nicht teilerfremd. Wenn das Maximum 1 ist, so ist $b = 1$ und somit ist $r = 0$ und $s = 1$ eine Darstellung der 1. Seien nun $a \leq b$ teilerfremd, $b \geq 2$ und die Aussage sei für alle Zahlenpaare, deren Maximum kleiner als b ist, schon bewiesen. Dann ist $a < b$, da bei $a = b$ die beiden Zahlen nicht teilerfremd sind. Ebenso können wir $a = 0$ ausschließen. Wir betrachten das Zahlenpaar $(a, b - a)$ und wollen darauf die Induktionsvoraussetzung anwenden. Das Maximum dieses neuen Paares ist jedenfalls kleiner als b. Allerdings müssen wir, damit die

Induktionsvoraussetzung wirklich eingesetzt werden kann, wissen, dass auch a und $b-a$ teilerfemd sind. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis. Nehmen wir also an, dass a und $b-a$ nicht teilerfremd sind. Dann gibt es eine natürliche Zahl $t \geq 2$, die sowohl a als auch $b-a$ teilt. Dies bedeutet wiederum, dass es natürliche Zahlen m, n gibt mit $a = mt$ und $b - a = nt$. Doch dann ist

$$b = (b-a) + a = nt + mt = (n+m)t$$

ebenfalls ein Vielfaches von t, im Widerspruch zur Teilerfremdheit von a und b. Die Induktionsvoraussetzung ist also auf a und $b-a$ anwendbar und somit gibt es ganze Zahlen r, s mit

$$ra + s(b-a) = 1.$$

Dann ist aber auch

$$(r-s)a + sb = ra + s(b-a) = 1$$

und wir haben eine Darstellung der 1 mit a und b gefunden. □

Der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie

Wir möchten nun zur Primfaktorzerlegung, deren Existenz wir bereits gezeigt haben, beweisen, dass sie eindeutig ist. Natürlich kann man

$$12 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

schreiben, mit eindeutig ist also eindeutig bis auf Reihenfolge gemeint. Um dies zu zeigen brauchen wir zunächst das sogenannte *Lemma von Euklid*, das eine wichtige Eigenschaft einer Primzahl beschreibt.

Satz 2.7. *Es sei p eine Primzahl und p teile ein Produkt ab von natürlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$. Dann teilt p einen der Faktoren.*

Beweis. Wir setzen voraus, dass a kein Vielfaches von p ist (andernfalls sind wir fertig). Dann müssen wir zeigen, dass b ein Vielfaches von p ist. Unter der gegebenen Voraussetzung sind a und p teilerfremd. Nach Satz 2.5 gibt es ganze Zahlen r, s mit

$$ra + sp = 1$$

Da ab ein Vielfaches von p ist, gibt es ein t mit

$$ab = tp.$$

Daher ist

$$b = b \cdot 1 = b(ra + sp) = abr + bsp = tpr + bsp = p\,(tr + bs)\,.$$

Also ist b ein Vielfaches von p. □

Aus dem Lemma von Euklid folgt sofort die etwas stärkere Aussage: Wenn eine Primzahl p ein beliebiges Produkt $a_1 a_2 \cdots a_n$ teilt, dann teilt p mindestens einen Faktor. Man wendet das Lemma einfach auf $(a_1 a_2 \cdots a_{n-1}) \cdot a_n$ an (formal ist das eine Induktion über die Anzahl der Faktoren). Dies wird im Beweis des folgenden *Hauptsatzes der elementaren Zahlentheorie* verwendet.

Satz 2.8. *Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, besitzt eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren.*

D.h. es gibt eine Darstellung

$$n = p_1 \cdots p_r$$

mit Primzahlen p_i, und dabei sind die Primfaktoren bis auf ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt.

Beweis. Die Existenz der Primfaktorzerlegung wurde bereits in Satz 2.2 gezeigt. Die Eindeutigkeit wird durch Induktion über n gezeigt. Für $n = 2$ liegt eine Primzahl vor. Sei nun $n \geq 3$ und seien zwei Zerlegungen in Primfaktoren gegeben, sagen wir

$$n = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s.$$

Wir müssen zeigen, dass nach Umordnung die Primfaktorzerlegungen übereinstimmen. Die Gleichheit bedeutet insbesondere, dass die Primzahl p_1 das Produkt rechts teilt. Nach Satz 2.6 muss dann p_1 einen der Faktoren rechts teilen. Nach Umordnung können wir annehmen, dass q_1 von p_1 geteilt wird. Da q_1 selbst eine Primzahl ist, folgt, dass $p_1 = q_1$ sein muss. Daraus ergibt sich durch Kürzen, dass

$$p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s$$

ist. Nennen wir diese Zahl n'. Da $n' < n$ ist, können wir die Induktionsvoraussetzung auf n' anwenden und erhalten, dass links und rechts die gleichen Primzahlen stehen. □

Primzahlprobleme

Die treibende Kraft der Mathematik ist es, Probleme zu lösen. Schwierige Probleme gibt es in allen Bereichen der Mathematik, besonders prägnant sind sie in der Zahlentheorie, da es dort eine Vielzahl von elementar formulierten ungelösten Problemen gibt. Als Beispiel besprechen wir das Problem der Primzahlzwillinge, zu dem es kürzlich (2013) einen wichtigen Fortschritt gab.

Definition 2.9. Ein *Primzahlzwilling* ist ein Paar bestehend aus p und $p+2$, wobei diese beiden Zahlen Primzahlen sind.

Die ersten Beispiele für Primzahlzwillinge sind

$$(3, 5),\ (5, 7),\ (11, 13),\ (17, 19),\ (29, 31), \ldots .$$

Übrigens ist $3, 5, 7$ der einzige Primzahldrilling, siehe Aufgabe 1.12.

Problem 2.10. Gibt es unendlich viele Primzahlzwillinge?

Eine Lösung dieses Problems wäre ein mathematischer Satz, der entweder besagt, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, oder dass es nur endlich viele Primzahlzwillinge gibt. D.h. das eine oder das andere müsste bewiesen werden. Bei schwierigen Problemen erwartet man nicht, dass jemand plötzlich einen Beweis hinschreibt, sondern dass eine neue und weit verzweigte Theorie entwickelt wird, mit der man letztlich einen Beweis geben kann.

Bemerkung 2.11. Die Frage, ob es endlich viele Primzahlzwillinge gibt, besitzt verschiedene schwächere Varianten. Man kann sich zum Beispiel fragen, ob es unendlich oft vorkommt, dass es in einem Zehnerintervall zwei Primzahlen gibt, oder dass es in einem Hunderterintervall zwei Primzahlen gibt, und so weiter. Die ersten Primzahlen vermitteln dabei ein Bild, dass Primzahlen ziemlich häufig sind. Sie werden aber zunehmend seltener, so dass es für hohe Hunderterintervalle, sagen wir für die Zahlen von

$$1000000000000000 \text{ bis } 1000000000000100$$

ziemlich unwahrscheinlich ist, eine Primzahl zu enthalten, geschweige denn zwei Primzahlen. Bis vor kurzem war es nicht bekannt, ob es überhaupt eine Zahl m mit der Eigenschaft gibt, dass es unendlich viele Intervalle der Länge m gibt, die zwei Primzahlen enthalten ($m = 2$ wäre die positive Lösung des Primzahlzwillingsproblems). Im Jahr 2013 bewies Zhang Yitang, dass man

$$m = 70000000$$

nehmen kann, dass es also unendlich viele Intervalle der Form

$$[k, k + 70000000]$$

gibt, in denen zwei Primzahlen liegen. Dieses Resultat ist ein Durchbruch in der Primzahlzwillingforschung, da es erstmals zeigt, dass sich Primzahlen unendlich oft „ziemlich nahe“ kommen.

2. Arbeitsblatt

Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1. Skizziere ein Teilerdiagramm (also ein Diagramm, in dem die Teilerbeziehung durch Pfeile ausgedrückt wird) für die Zahlen $25, 30, 36$ sowie all ihrer positiven Teiler.

Aufgabe 2.2. Finde die Primfaktorzerlegung von 1728.

Aufgabe 2.3. Finde die Primfaktorzerlegung der Zahlen

$$11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\ 111111\,.$$

(Vergleiche hierzu auch Aufgabe 3.21.)

Aufgabe 2.4. Finde die kleinste Zahl N der Form $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r + 1$, die keine Primzahl ist, wobei $p_1, p_2, \ldots, p_r$ die ersten r Primzahlen sind.

Aufgabe 2.5. Sei $r \in \mathbb{N}$.

a) Finde r aufeinander folgende natürliche Zahlen (also $n, n+1, \ldots, n+r-1$), die alle nicht prim sind.

b) Finde unendlich viele solcher primfreien r-„Intervalle".

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 1.10 hilfreich.

Aufgabe 2.6. Es sei a eine natürliche Zahl und es sei

$$a = \sum_{i=0}^{\ell} a_i 10^i$$

die Darstellung von a im Dezimalsystem. Zeige, dass a von 3 genau dann geteilt wird, wenn die *Quersumme* $\sum_{i=0}^{\ell} a_i$ von 3 geteilt wird.

Aufgabe 2.7. Finde eine Darstellung der 1 für die folgenden Zahlenpaare. 5 und 7; 20 und 27; 23 und 157.

Aufgabe 2.8. Es seien a und b natürliche Zahlen, deren Produkt ab von einer natürlichen Zahl n geteilt werde. Die Zahlen n und a seien teilerfremd. Zeige, dass b von n geteilt wird.

Aufgabe 2.9. Seien r und s teilerfremde Zahlen. Zeige, dass jede Lösung (x, y) der Gleichung

$$rx + sy = 0$$

die Gestalt $(x, y) = v(s, -r)$ hat, mit einer eindeutig bestimmten Zahl v.

Aufgabe 2.10. Es seien a und d teilerfremd. Zeige, dass es eine Potenz a^i mit $i \geq 1$ gibt, deren Rest bei Division durch d gleich 1 ist.

Tipp: Verwende Aufgabe 1.11 und betrachte den Rest von $a^j - a^i$ bei Division durch d.

Die folgende Aufgabe zeigt, dass die eindeutige Primfaktorzerlegung keineswegs selbstverständlich ist.

Aufgabe 2.11. Es sei $M \subseteq \mathbb{N}_+$ diejenige Teilmenge, die aus allen natürlichen Zahlen besteht, die bei Division durch 4 den Rest 1 besitzen, also $M = \{1, 5, 9, 13, 17, \ldots\}$. Zeige, dass man 441 innerhalb von M auf zwei verschiedene Arten in Faktoren zerlegen kann, die in M nicht weiter zerlegbar sind.

Aufgabe 2.12. Zeige, dass es außer $3, 5, 7$ kein weiteres Zahlentripel der Form $p, p+2, p+4$ gibt, in dem alle drei Zahlen Primzahlen sind.

Aufgabe 2.13. Es seien a und n natürliche Zahlen mit $n \geq 2$. Es sei

$$a = \sum_{i=0}^{\ell} a_i n^i$$

die Darstellung von a zur Basis n (also mit $0 \leq a_i < n$). Es sei k ein Teiler von $n-1$. Dann wird a von k genau dann geteilt, wenn die *Quersumme* $\sum_{i=0}^{\ell} a_i$ von k geteilt wird.

Aufgabe 2.14. Betrachte im 15er System mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 8, 9, A, B, C, D, E$ die Zahl

$$EA09B4CA\,.$$

Ist diese Zahl durch 7 teilbar?

Aufgabe 2.15. Alle Flöhe leben auf einem unendlichen Zentimeter-Band. Ein Flohmännchen springt bei jedem Sprung 78 cm und die deutlich kräftigeren Flohweibchen springen mit jedem Sprung 126 cm. Die Flohmännchen Florian, Flöhchen und Carlo sitzen in den Positionen $-123, 55$ und -49. Die Flohweibchen Flora und Florentina sitzen in Position 17 bzw. 109. Welche Flöhe können sich treffen?

Aufgabe 2.16. Wir betrachten eine digitale Uhr, die 24 Stunden, 60 Minuten und 60 Sekunden anzeigt. Zur Karnevalszeit läuft sie aber nicht in Sekundenschritten, sondern addiert, ausgehend von der Nullstellung, in jedem Zählschritt immer 11 Stunden, 11 Minuten und 11 Sekunden dazu. Wird bei dieser Zählweise jede mögliche digitale Anzeige erreicht? Nach wie vielen Schritten kehrt zum ersten Mal die Nullstellung zurück?

3. Vorlesung

Die rationalen Zahlen

Definition 3.1. Unter einer *rationalen Zahl* versteht man einen Ausdruck der Form

$$\frac{a}{b},$$

wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$ sind, und wobei zwei Ausdrücke $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ genau dann als gleich betrachtet werden, wenn $ad = bc$ (in $\mathbb{Z}$) gilt. Die Menge aller rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Bei $\frac{a}{b}$ heißt a der *Zähler* und b der *Nenner* der rationalen Zahl. Für die rationale Zahl $\frac{a}{1}$ schreibt man einfach a. In diesem Sinne sind ganze Zahlen insbesondere auch rationale Zahlen. Es gelten die folgenden Identitäten (dabei seien $c, d \neq 0$, ansonsten seien alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ beliebig).

(1)
$$\frac{1}{-1} = -1,$$

(2)
$$\frac{0}{c} = 0,$$

(3)
$$\frac{c}{c} = 1,$$

(4)
$$\frac{a}{c} = \frac{ad}{cd}.$$

Die Addition und die Multiplikation auf rationalen Zahlen wird folgendermaßen festgelegt.

(1)
$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} := \frac{ab}{cd},$$

(2)
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} := \frac{ad + bc}{cd}.$$

Man addiert also zwei rationale Zahlen, indem man die Nenner gleichnamig macht. Diese Operationen sind wohldefiniert und wieder assoziativ, kommutativ und es gilt das Distributivgesetz. Diese Eigenschaften kann man auf die entsprechenden Eigenschaften der ganzen Zahlen zurückführen, siehe Aufgabe 3.6.

Die $0 = \frac{0}{1}$ hat wieder die Eigenschaft

$$0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

und die $1 = \frac{1}{1}$ hat wieder die Eigenschaft

$$1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

Ferner gibt es wieder zu einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ die negative Zahl $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$. Sie besitzt die charakteristische Eigenschaft

$$\frac{-a}{b} + \frac{a}{b} = \frac{-a+a}{b} = 0.$$

Zu einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ mit $a, b \neq 0$ (also wenn Zähler und Nenner von 0 verschieden sind) ist auch der umgedrehte Bruch $\frac{b}{a}$ eine rationale Zahl, und es gilt

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1.$$

Man nennt $\frac{b}{a}$ die *inverse rationale Zahl* zu $\frac{a}{b}$.

Man kann die rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden platzieren (die ganzen Zahlen seien dort schon platziert). Die rationale Zahl $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}_+$ findet man so: Man unterteilt die Strecke von 0 nach a in b gleichlange Teilstrecken. Die Zahl $\frac{a}{b}$ ist dann die rechte Grenze des (von links) ersten Teilintervalls. Insbesondere ist $\frac{1}{b}$ die Länge des Intervalls, dass b-fach nebeneinander gelegt die Einheitsstrecke (oder das Einheitsintervall) ergibt.[3]

Als Punkte auf der Zahlengeraden lassen sich rationale Zahlen ihrer Größe nach vergleichen. Dabei gilt für $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}_+$ die Beziehung

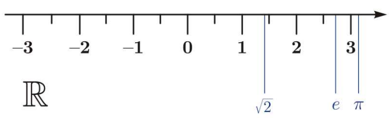
$$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$$

genau dann, wenn in $\mathbb{Z}$ die Beziehung

$$ad \geq bc$$

gilt. Um dies einzusehen, bringt man die beiden rationalen Zahlen auf den Hauptnenner, d.h. man vergleicht $\frac{ad}{bd}$ und $\frac{cb}{bd}$. Die Größerbeziehung hängt dann allein von den beiden Zählern ab.

Die reellen Zahlen



[3]Die Frage, wie man diese Unterteilung elementar durchführt, besprechen wir hier nicht.

Wir werden nun die reellen Zahlen besprechen, die wir uns durch alle Punkte des Zahlenstrahls vorstellen. Diese Vorstellung ist keineswegs unproblematisch, sie ist aber intuitiv sehr wertvoll. Allerdings ist die Intuition in der Mathematik kein Beweismittel. Ferner wird die Intuition häufig überschätzt und mit Gewohnheit verwechselt. Haben Sie eine sichere intuitive Vorstellung zur Multiplikation auf der Zahlengeraden?

Unsere Vorgehensweise ist daher, grundlegende Eigenschaften der reellen Zahlen ein für allemal zu formulieren und dann alle weiteren Eigenschaften aus diesen Grundeigenschaften abzuleiten. Diese grundlegenden Eigenschaften decken sich mit unserer intuitiven Vorstellung einer kontinuierlichen Zahlengeraden und mit unserer Rechenerfahrung mit reellen Zahlen.

Grundlegende Eigenschaften von mathematischen Strukuren werden als *Axiome* bezeichnet. In der Mathematik werden sämtliche Eigenschaften aus den Axiomen logisch abgeleitet. Die Axiome für die reellen Zahlen gliedern sich in algebraische Axiome, Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Unter algebraischen Eigenschaften versteht man solche Eigenschaften, die sich auf die Rechenoperationen, also die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation und die Division, beziehen. Diese Operationen ordnen zwei reellen Zahlen eine weitere reelle Zahl zu, man spricht auch von *Verknüpfungen.* Es genügt, nur Gesetzmäßigkeiten für die Addition und die Multiplikation aufzulisten, Subtraktion und Division ergeben sich als abgeleitete Operationen. Die Existenz der Addition und der Multiplikation ist Teil der Axiome.

Proposition 3.2. *Die Addition und die Multiplikation auf den reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ *(mit den Elementen* $0 \neq 1$*) erfüllen die folgenden Eigenschaften (bzw. Axiome).*

(1) *Axiome der Addition*
  (a) *Assoziativgesetz: Für alle* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *gilt:* $(a+b)+c = a+(b+c)$.
  (b) *Kommutativgesetz: Für alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt* $a + b = b + a$.
  (c) 0 *ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle* $a \in \mathbb{R}$ *ist* $a + 0 = a$.
  (d) *Existenz des Negativen: Zu jedem* $a \in \mathbb{R}$ *gibt es ein Element* $b \in \mathbb{R}$ *mit* $a + b = 0$.
(2) *Axiome der Multiplikation*
  (a) *Assoziativgesetz: Für alle* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *gilt:* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
  (b) *Kommutativgesetz: Für alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt* $a \cdot b = b \cdot a$.
  (c) 1 *ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle* $a \in \mathbb{R}$ *ist* $a \cdot 1 = a$.
  (d) *Existenz des Inversen: Zu jedem* $a \in \mathbb{R}$ *mit* $a \neq 0$ *gibt es ein Element* $c \in \mathbb{R}$ *mit* $a \cdot c = 1$.
(3) *Distributivgesetz: Für alle* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *gilt* $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Dass all diese Axiome für die reellen Zahlen (und die rationalen Zahlen) mit den natürlichen Verknüpfungen gelten, ist aus der Schule vertraut.

Zur Vereinfachung der Schreibweisen verwenden wir die *Klammerkonvention*, dass die Multiplikation stärker bindet als die Addition. Man kann daher $a \cdot b + c \cdot d$ statt $(a \cdot b) + (c \cdot d)$ schreiben. Zur weiteren Notationsvereinfachung wird das Produktzeichen häufig weggelassen. Die Elemente 0 und 1 werden als *Nullelement* und als *Einselement* bezeichnet. Es ist Teil der Axiomatik, dass sie verschieden sind.

Zu einer reellen Zahl a nennt man das Element b mit $a + b = 0$ das *Negative* von a. Es ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt und man bezeichnet es mit $-a$. Es ist $-(-a) = a$, da wegen $a + (-a) = 0$ das Element a gleich dem (eindeutig bestimmten) Negativen von $-a$ ist.

Statt $b + (-a)$ schreibt man abkürzend $b - a$ und spricht von der *Differenz*. Die Differenz ist also keine grundlegende Verknüpfung, sondern wird auf die Addition mit dem Negativen zurückgeführt.

Zu einer reellen Zahl a, $a \neq 0$, nennt man das Element c mit $ac = 1$ das *Inverse* von a und bezeichnet es mit a^{-1}. Für $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, schreibt man auch abkürzend

$$a/b := \frac{a}{b} := ab^{-1}.$$

Die beiden linken Ausdrücke sind also Abkürzungen für den rechten Ausdruck.

Zu einer reellen Zahl a und $n \in \mathbb{N}$ wird a^n als das n-fache Produkt von a mit sich selbst definiert, und bei $a \neq 0$ wird a^{-n} als $(a^{-1})^n$ interpretiert.

Anordnungseigenschaften der reellen Zahlen

Bekanntlich kann man die reellen Zahlen mit einer Geraden identifizieren. Auf dem Zahlenstrahl liegen von zwei Punkten einer weiter rechts als der andere, was bedeutet, dass sein Wert größer ist. Wir besprechen nun diese Anordnungseigenschaften der reellen Zahlen.

Axiom 3.3. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erfüllen die folgenden *Anordnungsaxiome*.

(1) Für je zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist entweder $a > b$ oder $a = b$ oder $b > a$.
(2) Aus $a \geq b$ und $b \geq c$ folgt $a \geq c$ (für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$).
(3) Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ (für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$).
(4) Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$ (für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$).
(5) Für jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $n \geq a$.

Archimedes (ca. 287 -212 v. C.)

Die ersten beiden Eigenschaften drücken aus, dass auf $\mathbb{R}$ eine *totale* (oder *lineare*) *Ordnung* vorliegt; die in (2) beschriebene Eigenschaft heißt Transitivität. Die fünfte Eigenschaft heißt *Archimedes-Axiom*.

Statt $a \geq b$ schreibt man auch $b \leq a$. Die Schreibweise $a > b$ bedeutet $a \geq b$ und $a \neq b$. Eine wichtige Beziehung in $\mathbb{R}$ ist, dass $a \geq b$ äquivalent[4] zu $a - b \geq 0$ ist. Diese Äquivalenz ergibt sich durch beidseitiges Addieren von $-b$ bzw. b aus dem dritten Axiom. Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ nennt man *positiv*, wenn $a > 0$ ist, und *negativ*, wenn $a < 0$ ist. Die 0 ist demnach weder positiv noch negativ, und jedes Element ist entweder positiv oder negativ oder null. Die Elemente a mit $a \geq 0$ nennt man dann einfach *nichtnegativ* und die Elemente a mit $a \leq 0$ *nichtpositiv*. Für die entsprechenden Teilmengen der reellen Zahlen schreibt man

$$\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_-,\ \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}_+^0,\ \mathbb{R}_{\leq 0} = \mathbb{R}_-^0$$

oder Ähnliches.

Lemma 3.4. *Für reelle Zahlen gelten die folgenden Eigenschaften.*

(1) $1 > 0$.
(2) *Aus* $a \geq b$ *und* $c \geq 0$ *folgt* $ac \geq bc$.
(3) *Aus* $a \geq b$ *und* $c \leq 0$ *folgt* $ac \leq bc$.
(4) *Es ist* $a^2 \geq 0$.
(5) *Aus* $a \geq b \geq 0$ *folgt* $a^n \geq b^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
(6) *Aus* $a \geq 1$ *folgt* $a^n \geq a^m$ *für ganze Zahlen* $n \geq m$.
(7) *Aus* $a > 0$ *folgt* $\frac{1}{a} > 0$.
(8) *Aus* $a > b > 0$ *folgt* $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

[4]Man sagt, dass zwei Aussagen A und B zueinander *äquivalent* sind, wenn die Aussage A genau dann wahr ist, wenn die Aussage B wahr ist. Dabei sind die beiden Aussagen häufig abhängig von gewissen Variablenbelegungen, und die Äquivalenz bedeutet dann, dass $A(x)$ genau dann wahr ist, wenn $B(x)$ wahr ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 3.13. □

Das folgende Lemma fasst Folgerungen aus dem Archimedes-Axiom zusammen.

Lemma 3.5. (1) *Zu $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$.*

(2) *Zu $x > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $\frac{1}{n} < x$.*

(3) *Zu zwei reellen Zahlen $x < y$ gibt es auch eine rationale Zahl n/k (mit $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}_+$) mit*

$$x < \frac{n}{k} < y\,.$$

Beweis. (1). Wir betrachten y/x. Aufgrund des Archimedes-Axioms gibt es ein n mit $n > y/x$. Da x positiv ist, gilt nach Lemma 3.4 (2) auch $nx > y$.
(2). Es ist x^{-1} eine wohldefinierte, nach Lemma 3.4 (7) positive reelle Zahl. Aufgrund des Archimedes-Axioms gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x^{-1}$. Dies ist nach Lemma 3.4 (8) äquivalent zu

$$\frac{1}{n} = n^{-1} < (x^{-1})^{-1} = x.$$

(3). Wegen $y > x$ ist $y - x > 0$ und daher gibt es nach (2) ein $k \in \mathbb{N}_+$ mit $\frac{1}{k} < y - x$. Wegen (1) gibt es auch ein $n' \in \mathbb{N}$ mit $n'\frac{1}{k} > x$. Wegen der Archimedes-Eigenschaft gibt es ein $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{n} \geq -xk$. Nach Lemma 3.4 (3) gilt daher $(-\tilde{n})\frac{1}{k} \leq x$. Daher gibt es auch ein $n \in \mathbb{Z}$ derart, dass

$$n\frac{1}{k} > x \text{ und } (n-1)\frac{1}{k} \leq x$$

ist. Damit ist einerseits $x < \frac{n}{k}$ und andererseits

$$\frac{n}{k} = \frac{n-1}{k} + \frac{1}{k} < x + y - x = y$$

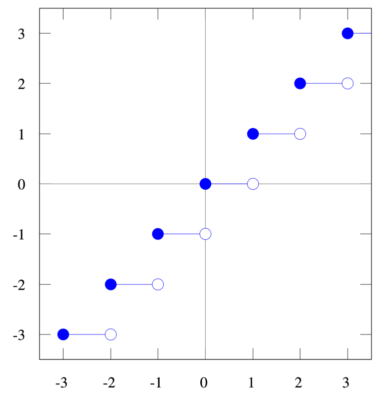
wie gewünscht. □

Definition 3.6. Für reelle Zahlen a, b, $a \leq b$, nennt man

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | \, x \geq a \text{ und } x \leq b\}$ das *abgeschlossene Intervall.*
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | \, x > a \text{ und } x < b\}$ das *offene Intervall.*
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | \, x > a \text{ und } x \leq b\}$ das *linksseitig offene Intervall.*
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | \, x \geq a \text{ und } x < b\}$ das *rechtsseitig offene Intervall.*

Für das offene Intervall wird häufig auch (a, b) geschrieben. Die Zahlen a und b heißen die *Grenzen des Intervalls* (oder *Randpunkte* des Intervalls), genauer spricht man von *unterer* und *oberer Grenze.* Die Bezeichnung linksseitig und rechtsseitig bei den beiden letzten Intervallen (die man auch als *halboffen* bezeichnet) rühren von der üblichen Repräsentierung der reellen Zahlen als Zahlengerade her, bei der rechts die positiven Zahlen stehen. Manchmal werden auch Schreibweisen wie (a, ∞) verwendet. Dies bedeutet *nicht*, dass es in $\mathbb{R}$ ein Element ∞ gibt, sondern ist lediglich eine kurze Schreibweise für $\{x \in \mathbb{R} | \, x > a\}$.

Für die reellen Zahlen bilden die ganzzahligen Intervalle $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, aufgrund des Archimedes-Axioms eine disjunkte *Überdeckung*. Deshalb ist die folgende Definition sinnvoll.



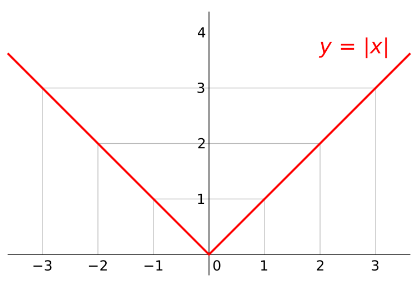
Es ist also $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Definition 3.7. Zu einer reellen Zahl x ist die *Gaußklammer* $\lfloor x \rfloor$ durch

$$\lfloor x \rfloor = n, \text{ falls } x \in [n, n+1[\text{ und } n \in \mathbb{Z}\,,$$

definiert.

Der Betrag



Definition 3.8. Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist der *Betrag* folgendermaßen definiert.

$$|x| = \begin{cases} x \text{ falls } x \geq 0 \\ -x \text{ falls } x < 0\,. \end{cases}$$

Der Betrag ist also nie negativ und hat nur bei $x = 0$ den Wert 0, sonst ist er immer positiv. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|,$$

nennt man auch *Betragsfunktion*. Der Funktionsgraph setzt sich aus zwei Halbgeraden zusammen; eine solche Funktion nennt man auch *stückweise linear*.

Lemma 3.9. *Die reelle Betragsfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|,$$

erfüllt folgende Eigenschaften (dabei seien x, y beliebige reelle Zahlen).

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ *genau dann, wenn* $x = 0$ *ist.*
(3) $|x| = |y|$ *genau dann, wenn* $x = y$ *oder* $x = -y$ *ist.*
(4) $|y - x| = |x - y|$.
(5) $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) *Für* $x \neq 0$ *ist* $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) *Es ist* $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(*Dreiecksungleichung für den Betrag*).*

Beweis. Siehe Aufgabe 3.18. □

3. Arbeitsblatt

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1.*

Bestimme, welche der beiden rationalen Zahlen p und q größer ist:

$$p = \frac{573}{-1234} \text{ und } q = \frac{-2007}{4322}\,.$$

Aufgabe 3.2.*

Zwei Fahrradfahrer, A und B, fahren auf ihren Fahrrädern eine Straße entlang. Fahrer A macht pro Minute 40 Pedalumdrehungen, hat eine Übersetzung von Pedal zu Hinterrad von 1 zu 6 und Reifen mit einem Radius von 39 Zentimetern. Fahrer B braucht für eine Pedaldrehung 2 Sekunden, hat eine Übersetzung von 1 zu 7 und Reifen mit einem Radius von 45 Zentimetern.

Wer fährt schneller?

Aufgabe 3.3.*

Zwei Personen, A und B, liegen unter einer Palme, A besitzt 2 Fladenbrote und B besitzt 3 Fladenbrote. Eine dritte Person C kommt hinzu, die kein Fladenbrot besitzt, aber 5 Taler. Die drei Personen werden sich einig, für die 5 Taler die Fladenbrote untereinander gleichmäßig aufzuteilen. Wie viele Taler gibt C an A und an B?

Aufgabe 3.4. Man gebe die Antworten als Bruch (bezogen auf das angegebene Vergleichsmaß): Um wie viel ist eine drei Viertel Stunde länger als eine halbe Stunde, und um wie viel ist eine halbe Stunde kürzer als eine drei Viertel Stunde?

Aufgabe 3.5. Man erläutere die Uhrzeitangaben „halb fünf“, „viertel fünf“, „drei viertel fünf“. Was würde „ein sechstel fünf“ und „drei siebtel fünf“ bedeuten?

Aufgabe 3.6. Zeige, und zwar allein unter Bezug auf Rechengesetze in $\mathbb{Z}$, dass die durch

(1)

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} := \frac{ab}{cd}$$

(2)

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} := \frac{ad + bc}{cd}$$

definierte Addition und Multiplikation auf den rationalen Zahlen wohldefiniert ist, und dass die Assoziativität, die Kommutativität und das Distributivgesetz gelten.

Aufgabe 3.7. Formuliere die *binomischen Formeln* für zwei reelle Zahlen und beweise die Formeln mit Hilfe des Distributivgesetzes.

Aufgabe 3.8. Zeige, dass es in $\mathbb{Q}$ kein Element x mit $x^2 = 2$ gibt.

Aufgabe 3.9. Es sei p eine Primzahl. Zeige, unter Verwendung der eindeutigen Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen, dass die reelle Zahl $\sqrt{p}$ irrational ist.

Aufgabe 3.10. Beweise durch Induktion die folgende Formel.

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{2(i-1)}}{3^i} = \left(\frac{4}{3}\right)^n .$$

Aufgabe 3.11. Besitzen Sie eine geometrische Intuition zur Addition von zwei gegebenen Zahlen auf der reellen Zahlengeraden?

Besitzen Sie eine geometrische Intuition zur Multiplikation von zwei gegebenen Zahlen auf der reellen Zahlengeraden?

Aufgabe 3.12.*

a) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0,1[$ mit

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

b) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0,1[$ mit

$$a^2 + b^2 \neq c^2 .$$

c) Man gebe ein Beispiel für irrationale Zahlen $a, b \in]0,1[$ und eine rationale Zahl $c \in]0,1[$ mit

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Die folgende Aufgabe soll allein unter Bezug auf die Anordnungsaxiome der reellen Zahlen gezeigt werden (also ohne Bezug auf die Anschauung der Zahlengeraden).

Aufgabe 3.13. Zeige, dass für reelle Zahlen die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) $1 > 0$.
(2) Aus $a \geq b$ und $c \geq 0$ folgt $ac \geq bc$.
(3) Aus $a \geq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \leq bc$.
(4) Es ist $a^2 \geq 0$.
(5) Aus $a \geq b \geq 0$ folgt $a^n \geq b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(6) Aus $a \geq 1$ folgt $a^n \geq a^m$ für ganze Zahlen $n \geq m$.
(7) Aus $a > 0$ folgt $\frac{1}{a} > 0$.
(8) Aus $a > b > 0$ folgt $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Aufgabe 3.14.*

Zeige, dass für reelle Zahlen $x \geq 3$ die Beziehung

$$x^2 + (x+1)^2 \geq (x+2)^2$$

gilt.

Vor den nächsten beiden Aufgaben erinnern wir an die beiden folgenden Definitionen.

Zu zwei reellen Zahlen x und y heißt

$$\frac{x+y}{2}$$

das *arithmetische Mittel*.

Zu zwei nichtnegativen reellen Zahlen x und y heißt

$$\sqrt{x \cdot y}$$

das *geometrische Mittel*.

Aufgabe 3.15. Es seien $x < y$ reelle Zahlen. Zeige, dass für das arithmetische Mittel $\frac{x+y}{2}$ die Beziehung

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

gilt.

Aufgabe 3.16. Es seien x und y zwei nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass das arithmetische Mittel der beiden Zahlen mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel ist.

Aufgabe 3.17. Es sei

$$n = dq + r$$

das Ergebnis einer Division mit Rest. Zeige, dass

$$q = \lfloor \frac{n}{d} \rfloor$$

ist.

Aufgabe 3.18. Beweise die folgenden Eigenschaften für die Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$

(dabei seien x, y beliebige reelle Zahlen).

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
(3) $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist.
(4) $|y - x| = |x - y|$.
(5) $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) Für $x \neq 0$ ist $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) Es ist $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).

Aufgabe 3.19.*

Beweise die *Bernoulli-Ungleichung*, das ist die Aussage, dass für reelle Zahlen $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

gilt.

Aufgabe 3.20. Sei x eine reelle Zahl, $x \neq 1$. Beweise für $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} .$$

Aufgabe 3.21. Es sei $p \neq 2, 5$ eine Primzahl. Zeige, dass es eine natürliche Zahl der Form (im Dezimalsystem)

$$111\ldots111$$

gibt, die ein Vielfaches von p ist.

Tipp: Verwende Aufgabe 2.10 mit $a = 10$ und $p = d$ und die vorstehende Aufgabe

Aufgabe 3.22. Es seien $x_1, \ldots, x_n$ reelle Zahlen. Zeige durch Induktion die Abschätzung

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| .$$

Aufgabe 3.23. Es seien drei Punkte $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ gegeben. Zeige, dass der Flächeninhalt des durch diese drei Punkte bestimmten Dreiecks eine rationale Zahl ist.

Aufgabe 3.24. Zeige, dass es kein gleichseitiges Dreieck gibt, dessen sämtliche Ecken rationale Koordinaten besitzen.

4. Vorlesung

Zifferndarstellung reeller Zahlen

Die Zifferndarstellung (oder Ziffernentwicklung) einer natürlichen Zahl haben wir bereits besprochen, für eine negative Zahl nimmt man einfach die zugehörige positive Zahl und schreibt ein Minuszeichen davor. Die zu einer Ziffernfolge gehörende Zahl gewinnt man, indem man aus der Ziffernfolge eine Vorschrift herausliest, was zu addieren, was zu multiplizieren, und was zu potenzieren ist (wobei Potenzieren eine bestimmte Form der Multiplikation ist). Beispielsweise ist die Ziffernfolge

$$5071$$

zu verstehen als

$$5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 .$$

Man muss also lediglich die Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ und die Zahl 10 sowie Addition und Multiplikation kennen, um die Ziffernfolge richtig zu interpretieren. Die Zifferndarstellung beruht also auf einer Kodierung von Rechenvorschriften. Die Operationen Addition und Multiplikation sollte man dabei als fundamentaler für die Zahlen ansehen als das Ziffernsystem, das lediglich eine geschickte Benennung darstellt.

Für reelle Zahlen gibt es ebenfalls eine solche Ziffernentwicklung, wobei diese allerdings im Allgemeinen mit unendlich vielen Ziffern beschrieben wird. Die Bedeutung dieser Ziffernentwicklung ergibt sich im Kontext von Folgen und Reihen in Zusammenhang mit der sogenannten *Vollständigkeit* der reellen Zahlen. Es ist nicht möglich, eine Ziffernfolge als reelle Zahl allein mittels Addition und Multiplikation zu interpretieren.

Wir betrachten zunächst eine abbrechende Ziffernentwicklung, wobei wir uns erstmal auf das Dezimalsystem beschränken. Es sei die Zahl

$$x = 5071,89826$$

gegeben. Sie ist zu interpretieren als die Zahl

$$5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-5} .$$

Hier schreiben wir 10^{-k} statt $\frac{1}{10^k}$. Diese Zahl kann man auch direkt als Bruch

$$\frac{507189826}{10000}$$

auffassen. Um also eine abbrechende Ziffernfolge richtig als Zahl zu interpretieren, muss man addieren, multiplizieren und auch durch Zehnerpotenzen teilen können.

Welche Bedeutung hat nun eine unendliche Ziffernentwicklung, wie

$$x = 5071,8980264951116035009536852735120347600683620345172348 7...$$

Zunächst mal gar keine, da ja gar nicht klar ist, was mit den Punkten zum Schluss gemeint ist, wie die Zifferndarstellung weiter geht. Eine solche Schreibweise ergibt allenfalls dann Sinn, wenn in den angeführten Ziffern ein Muster erkennbar ist, dessen Fortführung ins Unendliche dann die vollständige Ziffernfolge festlegt, wie bei

$$y = 5071,8980898089808980898089808980898089808980898089808980...$$

oder bei

$$z = 5071,010110111011110111110111111011111110...$$

Man kann ein Bildungsgesetz für die unendlich vielen Ziffern auf jede beliebige Weise angeben, solange nur jede Ziffer einen eindeutigen Wert bekommt.

Es sei jetzt eine irgendwie festgelegte unendliche Ziffernfolge gegeben. Welche Zahl verbirgt sich dahinter? Bei den abbrechenden Zahlen haben wir schon verwendet, dass die k-te Nachkommastelle den Wert $10^{-k} = \left(\frac{1}{10}\right)^k$ repräsentiert. Nach dem oben angeführten Gesetz, wie eine Ziffernfolge als Zahl zu interpretieren ist, sollte eine Ziffernfolge

$$0, z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 ...$$

als

$$z_1 10^{-1} + z_2 10^{-2} + z_3 10^{-3} + z_4 10^{-4} + z_5 10^{-5} + z_6 10^{-6} + \cdots$$

zu interpretieren sein. Dies ist eine „unendliche Summe“, und sowas ist *nicht* definiert. Ausdrücke wie

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$$

oder

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$$

lassen erkennen, dass man auch keine sinnvolle Interpretation für beliebige unendliche Summen erwarten darf. Allerdings ist es möglich, und zwar unter sehr restriktiven Voraussetzungen, gewisse unendliche Summen in sinnvoller Weise als reelle Zahlen zu interpretieren. Dies benötigt einige Vorbereitungen, doch dadurch werden letztlich auch die unendlichen Dezimalentwicklungen gerechtfertigt.

Mit der Interpretation der k-ten Nachkommastelle als 10^{-k} (bzw. $z_k 10^{-k}$), die ja mit wachsendem k kleiner werden, hängt zusammen, dass zu einer unendlichen Ziffernfolge die abgeschnittene Ziffernfolge bis zur k-ten Nachkommastelle eine *Approximation* der Zahl liefert, und dass mit wachsendem k die Approximationen immer besser werden. Für die Ziffernfolge

$$x = 5071,010110111011110111110111111011111110$$

sind also

$$x_0 = 5071\,,$$

$$x_1 = 5071,0$$

$$x_2 = 5071,01$$

$$x_3 = 5071,010$$

$$x_4 = 5071,0101$$

$$x_5 = 5071,01011$$

$$x_6 = 5071,010110$$

$$x_7 = 5071,0101101$$

zunehmend bessere Approximationen (wenn eine 0 dazukommt, kann man sich darüber streiten). All diese x_i sind rationale Zahlen, die zunehmend genauere Information über die durch die unendliche Ziffernfolge anvisierte Zahl beinhalten. Wir können also Ziffernfolgen als eine Folge von Approximationen auffassen. Eine fundamentale Beobachtung ist nun, dass Ziffernfolgen im Allgemeinen nicht die schnellste oder die beste Approximation einer Zahl geben, sondern dass häufig anders gelagerte Folgen besser sind. Deshalb werden die Approximationseigenschaften der reellen Zahlen über die fundamentalen Begriffe *Folge* und *Konvergenz* erfasst.

Heron von Alexandria (1. Jahrhundert n.C.)

Reelle Zahlenfolgen

Wir betrachten nun ein Beispiel, das ebenfalls zu Approximationen führt, aber nichts mit der Dezimalbruchentwicklung zu tun hat, nämlich Quadratwurzeln aus natürlichen (oder reellen) Zahlen. Die Quadratwurzel zu $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist diejenige (eindeutig bestimmte) reelle nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt. Innerhalb der rationalen Zahlen gibt es keine Wurzeln, so dass dies ein deutlicher Hinweis ist, dass sich viele Rechenoperationen nicht innerhalb der rationalen Zahlen durchführen lassen. Siehe Aufgabe 3.8 und Aufgabe 3.9.

Beispiel 4.1. Wir wollen die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl „berechnen", sagen wir von 5. Eine solche Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 = 5$ gibt es nicht innerhalb der rationalen Zahlen, wie aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung folgt. Wenn $x \in \mathbb{R}$ ein solches Element ist, so hat auch $-x$ diese Eigenschaft. Mehr als zwei Lösungen kann es aber nach Aufgabe 4.5 nicht geben, so dass wir nur nach der positiven Lösung suchen müssen.

Obwohl es innerhalb der rationalen Zahlen keine Lösung für die Gleichung $x^2 = 5$ gibt, so gibt es doch beliebig gute Approximationen innerhalb der rationalen Zahlen dafür. Beliebig gut heißt dabei, dass der Fehler (oder die Abweichung) unter jede positive Schranke gedrückt werden kann. Das klassische Verfahren, um eine Quadratwurzel beliebig anzunähern, ist das *Heron-Verfahren*, das man auch *babylonisches Wurzelziehen* nennt. Dies ist ein *iteratives Verfahren*, d.h., die nächste Approximation wird aus den vorausgehenden Approximationen berechnet. Beginnen wir mit $a := x_0 := 2$ als erster Näherung. Wegen

$$x_0^2 = 2^2 = 4 < 5$$

ist x_0 zu klein, d.h. es ist $x_0 < x$. Aus $a^2 < 5$ (mit a positiv) folgt zunächst $5/a^2 > 1$ und daraus $(5/a)^2 > 5$, d.h. $5/a > \sqrt{5}$. Man hat also die Abschätzungen

$$a < \sqrt{5} < 5/a\,,$$

wobei rechts eine rationale Zahl steht, wenn links eine rationale Zahl steht. Eine solche Abschätzung vermittelt offenbar eine quantitative Vorstellung darüber, wo $\sqrt{5}$ liegt. Die Differenz $5/a - a$ ist ein Maß für die Güte der Approximation.

Beim Startwert 2 ergibt sich, dass die Quadratwurzel von $\sqrt{5}$ zwischen 2 und $5/2$ liegt. Man nimmt nun das arithmetische Mittel der beiden Intervallgrenzen, also

$$x_1 := \frac{2 + \frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4}.$$

Wegen $\left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} > 5$ ist dieser Wert zu groß und daher liegt $\sqrt{5}$ im Intervall $[5 \cdot \frac{4}{9}, \frac{9}{4}]$. Von diesen Intervallgrenzen nimmt man erneut das arithmetische

Mittel und setzt

$$x_2 := \frac{5 \cdot \frac{4}{9} + \frac{9}{4}}{2} = \frac{161}{72}$$

als nächste Approximation. So fortfahrend erhält man eine immer besser werdende Approximation von $\sqrt{5}$.

Allgemein ergibt sich das folgende Heron-Verfahren.

Beispiel 4.2. Beim *Heron-Verfahren* zur Berechnung von $\sqrt{c}$ einer positiven Zahl c geht man iterativ wie folgt vor. Man startet mit einem beliebigen positiven Startwert x_0 und berechnet davon das arithmetische Mittel aus x_0 und c/x_0. Dieses Mittel nennt man x_1. Es gilt

$$\begin{aligned} x_1^2 - c &= \left(\frac{x_0 + \frac{c}{x_0}}{2}\right)^2 - c \\ &= \frac{x_0^2 + 2c + \frac{c^2}{x_0^2}}{4} - c \\ &= \frac{x_0^2 - 2c + \frac{c^2}{x_0^2}}{4} \\ &= \left(\frac{x_0 - \frac{c}{x_0}}{2}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

D.h. dass x_1 mindestens so groß wie $\sqrt{c}$ ist. Auf x_1 wendet man iterativ das gleiche Verfahren an und erhält so x_2 usw. Die Definition von x_{n+1} lautet also

$$x_{n+1} = \frac{x_n + c/x_n}{2}.$$

Nach Konstuktion weiß man, dass $\sqrt{c}$ in jedem Intervall $[c/x_n, x_n]$ (für $n \geq 1$) liegt, da aus $x_n^2 \geq c$ und $x_n \cdot c/x_n = c$ folgt, dass $\left(\frac{c}{x_n}\right)^2 \leq c$ ist. Bei jedem Schritt gilt

$$[\frac{c}{x_{n+1}}, x_{n+1}] \subseteq [\frac{c}{x_n}, x_n],$$

d.h. das Nachfolgerintervall liegt innerhalb des Vorgängerintervalls. Dabei wird bei jedem Schritt die Intervalllänge mindestens halbiert.

Das eben beschriebene Verfahren liefert also zu jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl, die eine durch eine gewisse algebraische Eigenschaft charakterisierte Zahl beliebig gut approximiert. Bei vielen technischen Anwendungen genügt es, gewisse Zahlen nur hinreichend genau zu kennen, wobei allerdings die benötigte Güte der Approximation von der technischen Zielsetzung abhängt. Es gibt im Allgemeinen keine Güte, die für jede vorstellbare Anwendung ausreicht, so dass es wichtig ist zu wissen, wie man eine gute Approximation durch eine bessere Approximation ersetzen kann und wie viele Schritte man machen muss, um eine gewünschte Approximation zu erreichen. Dies führt zu den Begriffen Folge und Konvergenz.

Definition 4.3. Eine *reelle Folge* ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},\ n \longmapsto x_n .$$

Eine Folge wird zumeist als $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, oder einfach nur kurz als $(x_n)_n$ geschrieben. Manchmal sind Folgen nicht für alle natürlichen Zahlen definiert, sondern nur für alle natürlichen Zahlen $\geq N$. Alle Begriffe und Aussagen lassen sich dann sinngemäß auch auf diese Situation übertragen. Grundsätzlich gibt es Folgen in jeder Menge, für die meisten Eigenschaften, für die man sich im Kontext von Folgen interessiert, braucht man aber eine zusätzliche „topologische Struktur“, wie sie in $\mathbb{R}$ existiert. Dies gilt insbesondere für den folgenden Begriff.

Definition 4.4. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge und es sei $x \in \mathbb{R}$. Man sagt, dass die Folge gegen x *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem positiven $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

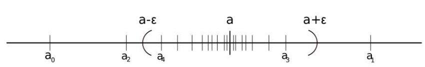
gilt. In diesem Fall heißt x der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

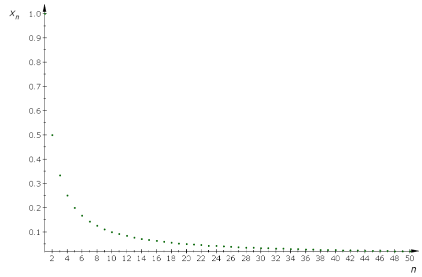
$$\lim_{n \to \infty} x_n := x \,.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert), andernfalls, dass sie *divergiert*.

Man sollte sich dabei das vorgegebene ϵ als eine kleine, aber positive Zahl vorstellen, die eine gewünschte *Zielgenauigkeit* (oder erlaubten Fehler) ausdrückt. Die natürliche Zahl n_0 ist dann die *Aufwandszahl*, die beschreibt, wie weit man gehen muss, um die gewünschte Zielgenauigkeit zu erreichen, und zwar so zu erreichen, dass alle ab n_0 folgenden Glieder innerhalb dieser Zielgenauigkeit bleiben. Konvergenz bedeutet demnach, dass man jede gewünschte Genauigkeit bei hinreichend großem Aufwand auch erreichen kann. Je kleiner der Fehler, also je besser die Approximation sein soll, desto höher ist im Allgemeinen der Aufwand. Statt mit beliebigen positiven reellen Zahlen ϵ kann man auch mit den *Stammbrüchen*, also den rationalen Zahlen $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}_+$, arbeiten, siehe Aufgabe 4.7.

Zu einem $\epsilon > 0$ und einer reellen Zahl x nennt man das Intervall $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ auch die *ϵ-Umgebung* von x. Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.





Beispiel 4.5. Eine *konstante Folge* $x_n := c$ ist stets konvergent mit dem Grenzwert c. Dies folgt direkt daraus, dass man für jedes $\epsilon > 0$ als Aufwandszahl $n_0 = 0$ nehmen kann. Es ist ja

$$|x_n - c| \;=\; |c - c| \;=\; |0| \;=\; 0 \;<\; \epsilon$$

für alle n.

Die Folge

$$x_n = \frac{1}{n}$$

ist konvergent mit dem Grenzwert 0. Sei dazu ein beliebiges positives ϵ vorgegeben. Aufgrund des Archimedes Axioms gibt es ein n_0 mit $\frac{1}{n_0} \leq \epsilon$. Insgesamt gilt damit für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$x_n \;=\; \frac{1}{n} \;\leq\; \frac{1}{n_0} \;\leq\; \epsilon.$$

Lemma 4.6. *Eine reelle Folge besitzt maximal einen Grenzwert.*

Beweis. Nehmen wir an, dass es zwei verschiedene Grenzwerte x, y, $x \neq y$, gibt. Dann ist $d := |x - y| > 0$. Wir betrachten $\epsilon := d/3 > 0$. Wegen der Konvergenz gegen x gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$

und wegen der Konvergenz gegen y gibt es ein n_0' mit

$$|x_n - y| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0'\,.$$

Beide Bedingungen gelten dann gleichermaßen für $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$. Sei n mindestens so groß wie dieses Maximum. Dann ergibt sich aufgrund der Dreiecksungleichung der Widerspruch

$$d \;=\; |x - y| \;\leq\; |x - x_n| + |x_n - y| \;\leq\; \epsilon + \epsilon \;=\; 2d/3.$$

$\square$

Rechenregeln für Folgen

Lemma 4.7. *Es seien* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *und* $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergente Folgen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Folge* $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) .$$

(2) *Die Folge* $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) .$$

(3) *Für* $c \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) .$$

(4) *Es sei* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ *und* $x_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ebenfalls konvergent mit*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x} .$$

(5) *Es sei* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ *und* $x_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ebenfalls konvergent mit*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{x} .$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. ☐

4. Arbeitsblatt

Übungsaufgaben

Die beiden ersten Aufgaben sollen dazu anregen, über die Güte von Dezimalbruchentwicklungen zu diskutieren.

Aufgabe 4.1. Stimmen die beiden reellen Zahlen

$$\frac{\pi\sqrt{163}}{3} \text{ und } \ln 640320$$

überein?

Aufgabe 4.2. Stimmen die beiden reellen Zahlen

$$\sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}} \text{ und } \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$$

überein?

Aufgabe 4.3. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 5 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 4.4.*

Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $a_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen a_1, a_2, a_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Aufgabe 4.5. Sei a eine reelle Zahl. Zeige, dass die Gleichung $x^2 = a$ höchstens zwei Lösungen in $\mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 4.6. Formuliere und beweise die *Lösungsformel für eine quadratische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Aufgabe 4.7. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeige, dass die Folge genau dann gegen x konvergiert, wenn es für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $|x_n - x| \leq \frac{1}{k}$ gilt.

Aufgabe 4.8. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{n^2}$$

gegebene Folge ($n \geq 1$) auf Konvergenz.

Aufgabe 4.9. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{10^n}$$

gegebene Folge auf Konvergenz.

Aufgabe 4.10. Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente reelle Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$ gilt.

Die folgende Aussage nennt man auch das *Quetschkriterium für Folgen.*

Aufgabe 4.11. Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Folgen. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Für die folgende Aufgabe können Sie bekannte Eigenschaften der Sinusfunktion verwenden.

Aufgabe 4.12.*

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n}, \; n \in \mathbb{N}_+ .$$

Aufgabe 4.13. Beweise die Aussagen (1), (3) und (5) von Lemma 4.7.

Aufgabe 4.14. Sei $k \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Folge $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 4.15. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die Folge

$$(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert, und zwar gegen $|x|$.

In den beiden folgenden Aufgaben geht es um die Folge der Fibonacci-Zahlen.

Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* f_n ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1 \, , f_2 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n \, .$$

Aufgabe 4.16. Beweise durch Induktion die *Simpson-Formel* oder Simpson-Identität für die Fibonacci-Zahlen f_n. Sie besagt $(n \geq 2)$

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \, .$$

Aufgabe 4.17. Beweise durch Induktion die *Binet-Formel* für die Fibonacci-Zahlen. Diese besagt, dass

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

gilt $(n \geq 1)$.

Aufgabe 4.18. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

gegebene Folge $(n \geq 1)$ auf Konvergenz.

Aufgabe 4.19. Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{7n^3 - 3n^2 + 2n - 11}{13n^3 - 5n + 4}$$

definierten reellen Folge.

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 1.5 hilfreich.

Aufgabe 4.20. Zeige, dass die reelle Folge

$$\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 4.21. Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{2n + 5\sqrt{n} + 7}{-5n + 3\sqrt{n} - 4}$$

definierten reellen Folge.

Aufgabe 4.22. Man gebe Beispiele für konvergente reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, und mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ derart, dass die Folge

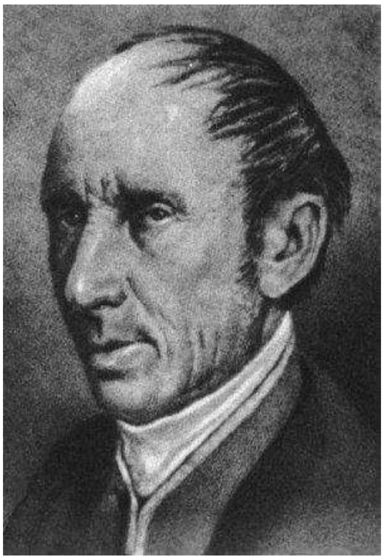
$$\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(1) gegen 0 konvergiert,
(2) gegen 1 konvergiert,
(3) divergiert.

5. Vorlesung

Cauchy-Folgen

Ein Problem des Konvergenzbegriffes ist, dass zur Formulierung der Grenzwert verwendet wird, den man unter Umständen noch gar nicht kennt. Wenn man beispielsweise die durch das babylonische Wurzelziehen konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sagen wir zur Berechnung von $\sqrt{5}$) mit einem rationalen Startwert betrachtet, so ist dies eine Folge aus rationalen Zahlen. Wenn wir diese Folge in $\mathbb{R}$ betrachten, wo $\sqrt{5}$ existiert, so ist die Folge konvergent. Innerhalb der rationalen Zahlen ist sie aber definitiv nicht konvergent. Es ist wünschenswert, allein innerhalb der rationalen Zahlen den Sachverhalt formulieren zu können, dass die Folgenglieder beliebig nahe zusammenrücken, auch wenn man nicht sagen kann, dass die Folgenglieder einem Grenzwert beliebig nahe zustreben. Dazu dient der Begriff der Cauchy-Folge.



Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Definition 5.1. Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.

Satz 5.2. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wenden die Konvergenzeigenschaft auf $\epsilon/2$ an. Daher gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon/2 \text{ für alle } n \geq n_0\,.$$

Für beliebige $n, m \geq n_0$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|x_n - x_m| \;\leq\; |x_n - x| + |x - x_m| \;\leq\; \epsilon/2 + \epsilon/2 \;=\; \epsilon.$$

Also liegt eine Cauchy-Folge vor. □

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Axiom 5.3. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind vollständig, d.h. jede reelle Cauchy-Folge besitzt einen Grenzwert.

Damit haben wir alle Axiome der reellen Zahlen zusammengetragen: die Körperaxiome, die Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Diese Eigenschaften legen die reellen Zahlen eindeutig fest, d.h. wenn es zwei Modelle $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ gibt, die beide für sich genommen diese Axiome erfüllen, so kann man eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_1$ nach $\mathbb{R}_2$ angeben, die alle mathematischen Strukturen erhält (sowas nennt man einen „Isomorphismus").

Die Existenz der reellen Zahlen ist nicht trivial. Vom naiven Standpunkt her kann man, und das haben wir bisher getan und werden wir auch weiterhin tun, die Vorstellung einer „kontinuierlichen lückenfreien Zahlengerade" zugrunde legen, und dies als Existenznachweis akzeptieren. In einer strengeren mengentheoretischen Begründung der Existenz geht man von $\mathbb{Q}$ aus und konstruiert die reellen Zahlen als die Menge der Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ mit einer geeigneten Identifizierung.

Intervallschachtelungen

Definition 5.4. Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N}\,,$$

in $\mathbb{R}$ heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also

$$(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}\ ,$$

gegen 0 konvergiert.

Satz 5.5. *Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Dann besteht der Durchschnitt*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Eine reelle Intervallschachtelung bestimmt also genau eine reelle Zahl.

Beweis. Siehe Aufgabe 5.4. □

Wenn diese Intervalle durch $I_n = [a_n, b_n]$ gegeben sind, so ist

$$x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Dies wird in Aufgabe 5.5 bewiesen.

Konvergenz der Zifferndarstellung

Aus der Vollständigkeit ergeben sich wichtige Resultate über die Existenz von Zahlen, nämlich in dem Sinne, dass Approximationsverfahren in der Tat reelle Zahlen liefern. Als erstes kehren wir zur Zifferndarstellung zurück.

Satz 5.6. *Eine Zifferndarstellung (im Dezimalsystem) definiert eine eindeutig bestimmte reelle Zahl. Wenn*

$$0, z_1 z_2 z_3 \ldots$$

die Zifferndarstellung bezeichnet, so ist die Zahl der Grenzwert der durch

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} z_i 10^{-i}$$

gegebenen Folge.

Beweis. Es sei eine unendliche Zifferndarstellung (oder Dezimalentwicklung) gegeben, wobei wir uns nur um Darstellungen der Form $0, z_1 z_2 z_3 \ldots$ kümmern müssen. Es genügt zu zeigen, dass die zugehörige Folge

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} z_i 10^{-i}$$

eine Cauchy-Folge ist. Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ besitzt dann die Zifferndarstellung einen eindeutigen Grenzwert, und dieser ist die durch die Zifferndarstellung bestimmte Zahl. Dazu betrachten wir die Differenz (für $m \geq n$)

$$\begin{aligned} x_m - x_n &= \sum_{i=0}^{m} z_i 10^{-i} - \sum_{i=0}^{n} z_i 10^{-i} \\ &= \sum_{i=n+1}^{m} z_i 10^{-i} \\ &= 10^{-n-1} \left(\sum_{j=0}^{m-n-1} z_{j+n+1} 10^{-j} \right) \\ &\leq 10^{-n} \left(\sum_{j=0}^{m-n-1} 10^{-j} \right), \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Abschätzung verwendet haben, dass die Ziffern kleiner als 10 sind. Nach Aufgabe 3.20 gilt für die Summe rechts die Gleichheit

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-n-1} 10^{-j} &= \sum_{j=0}^{m-n-1} \left(\frac{1}{10} \right)^{-j} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &\leq \frac{1}{\frac{9}{10}} \\ &= \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

Bei gegebenem n haben wir also für jedes $m \geq n$ die Abschätzung

$$x_m - x_n \leq 10^{-n} \frac{10}{9}.$$

Zu einem beliebig vorgegebem $\epsilon > 0$ finden wir zuerst ein n_0 mit

$$10^{-n_0}\frac{10}{9} \leq \epsilon$$

und für $m \geq n \geq n_0$ gilt dann

$$x_m - x_n \leq \epsilon.$$

□

Satz 5.7. *Zu einer reellen Zahl $x \in [0,1[$ erhält man eine Zifferentwicklung (im Dezimalsystem) mit den Ziffern z_i durch die rekursive Bestimmung*

$$s_0 = x,\ z_{i+1} = \lfloor s_i \cdot 10 \rfloor \text{ und } s_{i+1} = s_i \cdot 10 - z_{i+1}\,,$$

die x darstellt.

Beweis. Zu jeder reellen Zahl $t \in [a,b[$ in einem halboffenen Intervall gibt es ein eindeutiges j, $0 \leq j \leq 9$, mit

$$t \in [a + \frac{j}{10}(b-a), a + \frac{j+1}{10}(b-a)[\,,$$

da diese Intervalle eine disjunkte Zerlegung von $[a,b[$ bilden. Bei $[a,b[= [0,1[$ kann man das j als $j = \lfloor 10t \rfloor$ finden. Das angegebene Rekursionsschema funktioniert auf diese Weise, d.h. $\frac{z_1}{10}$ mit $z_1 = \lfloor 10s_0 \rfloor$ ist die linke Grenze des halboffenen Teilintervalls der Länge $\frac{1}{10}$ an, in dem r_0 liegt. Die Zahl $s_1 = 10s_0 - z_1$ gibt somit das Zehnfache des Abstands der Zahl s_0 von der linken Grenze des Teilintervalls an. Induktiv sieht man, dass z_i eine natürliche Zahl zwischen 0 und 9 ist, dass $s_i \in [0,1[$ ist und dass

$$x \in [\sum_{i=1}^{k} z_i 10^{-i}, \sum_{i=1}^{k} z_i 10^{-i} + 10^{-k}[$$

für jedes k ist. Daher ist $0, z_1z_2z_3...$ eine Ziffernentwicklung und es liegt eine Intervallschachtelung für x vor, wobei die unteren Intervallgrenzen die durch die Ziffernentwicklung gegebenen Folgenglieder sind. Die zu dieser Ziffernentwicklung nach Satz 5.6 gehörige Zahl muss nach Aufgabe 5.5 gleich x sein. □

Die im vorstehenden Satz formulierte Ziffernentwicklung nennt man auch die *kanonische Ziffernentwicklung*; sie ist in eindeutiger Weise einer reellen Zahl zugeordnet. Die Ziffernentwicklung

$$0,999999999999999999999999999999999999999999...$$

ist zwar eine erlaubte Ziffernentwicklung, aber keine kanonische Ziffernentwicklung. Die zugehörige reelle Zahl ist die 1, und deren kanonische Ziffernentwicklung ist

$$1,0000000000000000000000000000000000000000...\,.$$

Die besprochene Dezimalentwicklung gemäß dem angegebenen Rekursionsschema funktioniert für eine jede reelle Zahl $x \in [0,1[$; dabei kann sie auf recht unterschiedliche Art festgelegt sein (als Grenzwert einer Folge, durch eine algebraische Eigenschaft, etc.). Für eine rationale Zahl $x = \frac{a}{b}$ $(0 \leq a < b)$ besitzt das Schema die Eigenschaft, dass $s_i = \frac{r_i}{b}$ selbst ein Bruch ist mit b als Nenner und wobei r_i der Rest bei Division von $a10^i$ durch b ist. Durch Induktion nach i zeigt man nämlich die Beziehung

$$a10^i = bq_i + r_i$$

und

$$q_i = \sum_{j=1}^{i} z_j 10^{i-j},$$

siehe Aufgabe 5.7.

Satz 5.8. *Eine reelle Zahl ist genau dann eine rationale Zahl, wenn sie eine periodische Ziffernentwicklung (im Dezimalsystem) besitzt.*

Beweis. Es sei $x = \frac{a}{b}$ eine rationale Zahl, von der wir annehmen können, dass sie in $[0,1[$ liegt. Es sei

$$0, z_1 z_2 z_3 ...$$

die nach Satz 5.7 zugehörige Zifferenentwicklung gemäß dem Rekursionsschema $z_{i+1} = \lfloor 10 s_i \rfloor$ und $s_{i+1} = 10 s_i - z_{i+i}$. Es ist einerseits $s_i \in [0,1[$ und andererseits sind die s_i rationale Zahlen mit b als Nenner. D.h. s_i muss eine der b Zahlen

$$0, \frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \frac{3}{b}, \ldots, \frac{b-1}{b}$$

sein. Unter den $s_1, s_2, s_3, \ldots$ muss es also irgendwann eine Wiederholung geben, sagen wir $s_k = s_\ell$ mit $\ell > k$. Da die Zahlen z_{i+1} und s_{i+1} nur von s_i abhängen, ist $z_{\ell+1} = z_{k+1}$, $z_{\ell+2} = z_{k+2}$, u.s.w, d.h., es liegt eine Periodizität vor. Es liege eine periodische Ziffernentwicklung für die reelle Zahl x vor. Da sich die Eigenschaft, eine rationale Zahl zu sein, nicht bei Multiplikation mit einer rationalen Zahl $\neq 0$ und bei Addition mit einer rationalen Zahl ändert, können wir sofort annehmen, dass die Ziffernentwicklung die Form

$$0, z_1 z_2 \ldots z_m z_1 z_2 \ldots z_m z_1 z_2 \ldots z_m z_1 z_2 \ldots z_m \ldots$$

besitzt. Die dadurch definierte Zahl können wir als

$$\left(\sum_{i=1}^{m} z_i 10^i \right) \cdot 0,00\ldots 00100\ldots 00100\ldots 00100\ldots 001\ldots$$

auffassen, wobei die Einsen an der m-ten, $2m$-ten u.s.w. Stelle stehen. Wir müssen uns also nur noch um periodische Ziffernentwicklungen von dieser speziellen Art kümmern. Wir betrachten die Folge

$$y_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} \left(\frac{1}{10} \right)^{\ell m},$$

deren Glieder approximierende abbrechende Ziffernentwicklungen von x sind (wobei manche übersprungen werden). Aufgrund von Aufgabe 3.20 ist

$$\sum_{j=1}^{\ell} \left(\frac{1}{10}\right)^{\ell m} = \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{(\ell+1)m}}{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{m}} - 1.$$

Der Limes davon (für ℓ gegen unendlich) ist, da ja $\left(\frac{1}{10}\right)^{(\ell+1)m}$ gegen 0 konvergiert, gleich

$$\frac{1}{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{m}} - 1 = \frac{1}{\left(\frac{99\cdots 99}{10^m}\right)} - 1 = \frac{10^m}{99\cdots 99} - 1 = \frac{1}{99\cdots 99},$$

wobei jeweils m Neunen vorkommen. Diese Zahl ist also rational. □

Die entsprechende Aussage gilt für die Ziffernentwicklung zu jeder Basis, nicht nur im Dezimalsystem. Eine reelle Zahl mit einer periodischen Ziffernentwicklung wird so geschrieben, dass man einen Strich über die Periode macht, also beispielsweise

$$351{,}0528\overline{82700}\,.$$

5. Arbeitsblatt

Übungsaufgaben

Aufgabe 5.1. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die (in $\mathbb{Q}$) nicht konvergiert.

Aufgabe 5.2. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende reelle Folge, die nach oben beschränkt ist. Es gelte also $x_m \leq x_n$ für $m \leq n$ und $x_n \leq b$ für alle n und eine gewisse reelle Zahl b. Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 5.3. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine nichtnegative reelle Zahl und $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die rekursiv definierte Folge mit

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Aufgabe 5.4. Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ besteht.

Aufgabe 5.5. Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass diese Folge gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl konvergiert.

Aufgabe 5.6. Es sei x eine reelle Zahl, von welcher der Beginn der Dezimalbruchentwicklung gleich

$$0,3333333333...$$

(die weiterer Ziffern sind nicht bekannt). Was kann man über die Dezimalbruchentwicklung von $3x$ sagen? In welchem (möglichst kleinen) Intervall liegt $3x$?

Aufgabe 5.7. Zeige, dass für eine rationale Zahl $x = \frac{a}{b} \in [0,1[$ das Rekursionsschema aus Satz 5.7 die Eigenschaft besitzt, dass $s_i = \frac{r_i}{b}$ ein Bruch mit b als Nenner ist und dass die Beziehung

$$a10^i = bq_i + r_i$$

mit

$$q_i = \sum_{j=1}^{i} z_j 10^{i-j}$$

gilt.

Aufgabe 5.8. Bestimme die Dezimalentwicklung von $\frac{5}{7}$ anhand des in Satz 5.7 besprochenen Rekursionsschemas.

Aufgabe 5.9. Bestimme die rationale Zahl, die im Dezimalsystem durch

$$0,11\overline{05}$$

gegeben ist.

Aufgabe 5.10. Bestimme die Ziffernentwicklung im Dualsystem derjenigen reellen Zahl, die im Dezimalsystem durch $0,\overline{3}$ gegeben ist.

Aufgabe 5.11. Bestimme die Ziffernentwicklung im Dreiersystem derjenigen reellen Zahl, die im Dezimalsystem durch $0,\overline{17}$ gegeben ist.

Aufgabe 5.12. Die beiden reellen Zahlen x und y seien durch ihre Dezimalbruchentwicklung

$$x = 0, z_1 z_2 z_3 \ldots$$

und

$$y = 0, u_1 u_2 u_3 \ldots$$

gegeben. Man gebe unter Bezug auf diese Zifferentwicklungen eine Folge mit rationalen Gleidern an, die gegen xy konvergiert.

Aufgabe 5.13. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}.$$

Zeige, dass diese Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert und dass der Grenzwert x die Bedingung

$$x = 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus x.

Tipp: Zeige zuerst mit Hilfe der Simpson-Formel, dass man mit diesen Brüchen eine Intervallschachtelung basteln kann.

Aufgabe 5.14. Es seien $b > a > 0$ positive reelle Zahlen. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $x_0 = a$, $y_0 = b$ und durch

$$x_{n+1} = \text{ geometrisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,,$$

$$y_{n+1} = \text{ arithmetisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,.$$

Zeige, dass $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung ist.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Domen-indukto.gif , Autor = Joachim Mohr, Lizenz = CC-by-sa 3.0 5

Quelle = New Animation Sieve of Eratosthenes.gif , Autor = Benutzer M.qrius auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 12

Quelle = Kielcanal.PNG , Autor = Benutzer Grunners auf Commons, Lizenz = PD 13

Quelle = Real number line.svg , Autor = Benutzer Phrood auf Commons, Lizenz = PD 21

Quelle = Archimedes (Idealportrait).jpg , Autor = Benutzer Ixitixel auf Commons, Lizenz = PD 23

Quelle = Floor function.svg , Autor = Benutzer Omegatron auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 25

Quelle = Absolute value.svg , Autor = Benutzer Ævar Arnfjörð Bjarmason auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 25

Quelle = Heron von Alexandria.jpg , Autor = Benutzer Frank C. Müller auf Commons, Lizenz = PD 33

Quelle = Konvergenz.svg , Autor = Benutzer Matthias Vogelgesang auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 37

Quelle = Cauchy sequence - example.png , Autor = Benutzer Pred auf da.wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 2.5 37

Quelle = Augustin Louis Cauchy.JPG , Autor = Benutzer Anarkman auf Commons, Lizenz = PD 42