Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Einführung in die mathematische Logik

Vorlesung 17

Isomorphie und elementare Äquivalenz im endlichen Fall

Beispiel 17.1. Das Symbolalphabet S bestehe (neben Variablen) aus einem einstelligen Funktionssymbol f. Die Ausdrucksmenge Γ bestehe aus einem Satz, der inhaltlich besagt, dass eine erfüllende Menge genau n Elemente besitzen muss, und einen Satz, der besagt, dass die Funktion bijektiv ist. Ein Modell für Γ ist also eine n-elementige Menge M zusammen mit einer fixierten Permutation

$$f^M \colon M \longrightarrow M$$

auf dieser Menge. Eine Teilmenge $T \subseteq M$ der Form

$$T = \{m, f(m), f^2(m), \ldots, f^{k-1}(m)\}$$

mit $f^k(m) = m$ und mit $f^i(m) \neq m$ für alle i, $1 \leq i \leq k-1$, nennt man Zykel zu f der Länge k. Die Menge M ist die disjunkte Vereinigung von Zykeln unterschiedlicher Länge. Zwei Elemente $m, n \in M$ sind genau dann elementar äquivalent, wenn sie beide in einem gleichlangen (aber nicht unbedingt im gleichen) Zykel liegen: Einerseits lässt sich die Zykellänge k erststufig formalisieren, etwa durch

$$f^k x = x \wedge f^{k-1} x \neq x \wedge \ldots \wedge fx \neq x\,,$$

wobei die Potenzen ausgeschrieben werden müssen. Andererseits kann man einfach Automorphismen angeben, indem man aus jedem Zykel Z_j ein Element m_j auswählt und dieses auf ein beliebiges Element $n_j = \psi(m_j)$ eines Zykels gleicher Länge schickt, wobei jeder Zykel genau einmal getroffen wird. Durch

$$\psi(f^i(m_j)) := f^i(\psi(m_j))$$

erhält man einen wohldefinierten Automorphismus. Insbesondere kann man einen Automorphismus konstruieren, der m auf n abbildet.

Aus den Überlegungen der letzten Vorlesung erhalten wir das folgende Resultat. Im Beweis arbeiten wir mit folgender Definition.

Definition 17.2. Es sei S ein erststufiges Symbolalphabet umd M eine S-Struktur. Eine Teilmenge $T \subseteq M$ heißt *funktional abgeschlossen* (oder eine *S-Unterstruktur*), wenn für jede Konstante $c \in S$ das Element c^M zu T gehört und für jedes k-stellige Funktionssymbol f und beliebige Elemente $m_1, \ldots, m_k \in T$ auch $f^M(m_1, \ldots, m_k)$ zu T gehört.

Unter einem *formal-zusammengesetzten Funktionssymbol* (oder *Funktionssymbolbaum*) versteht man die Elemente der folgenden rekursiv festgelegten Menge (innerhalb der Menge von Stammbäumen).

(1) Jedes Funktionssymbol (einschließlich der Konstanten) gehört dazu.
(2) Wenn f ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $F_1, \ldots, F_k$ formal-zusammengesetzte Funktionssymbole, so ist auch der Stammbaum (nicht die Symbolkette) $fF_1 \ldots F_k$ ein formal-zusammengesetztes Funktionssymbol.

Bei einer Interpretation mit Grundmenge M wird ein formal-zusammengesetztes Funktionssymbol F als Hintereinanderschaltung der beteiligten Abbildungen interpretiert, wofür wir wieder F^M schreiben. Eine funktional abgeschlossene Menge ist auch unter jeder formal-zusammengesetzten Funktion abgeschlossen, und zu einer Startmenge $U \subseteq M$ besteht die kleinste funktional abgeschlossene Teilmenge, die U enthält, genau aus den Werten der formal-zusammengesetzten Funktionen mit Argumenten aus U. (die *funktionale Hülle* von U).

Satz 17.3. *Es sei S ein Symbolalphabet und es seien M und N S-Strukturen, wobei M endlich sei. Dann sind M und N genau dann elementar äquivalent, wenn sie zueinander isomorph sind.*

Beweis. Dass eine Isomorphie elementare Äquivalenz impliziert, wurde in Satz 16.7 bewiesen. Für die Umkehrung seien also die beiden Strukturen elementar äquivalent, und M habe r Elemente. Dann gilt in M die Aussage

$$\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_r \,(x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \ldots \wedge x_1 \neq x_r \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \ldots \\ \wedge x_2 \neq x_r \wedge \ldots \wedge x_{r-1} \neq x_r)$$

und die entsprechende Aussage für $r+1$ gilt nicht. Aufgrund der elementaren Äquivalenz gilt diese Aussage (bzw. die ensprechende Aussage) auch (nicht) in N. D.h. N ist ebenfalls endlich mit r Elementen.

Wir betrachten auf M die elementare Äquivalenz von Elementen, die wir mit $m \sim n$ bezeichnen. Es seien $M_1, \ldots, M_k$ die zugehörigen Äquivalenzklassen und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ zugehörige beschreibende Ausdrücke in einer freien Variablen, die es nach Lemma 16.10 gibt.

Wir konstruieren nun sukzessive Teilmengen $S_j \subset S_{j+1} \subseteq M$, wobei die S_j funktional abgeschlossen sind, und Abbildungen

$$\psi_j \colon\, S_j \longrightarrow N$$

mit $\psi_{j+1}|_{S_j} = \psi_j$ und derart, dass die ψ_j für jedes j Isomorphismen zwischen S_j und $T_j = \operatorname{bild} \psi_j$ sind.

Wir wählen $m_1 \in M$ beliebig und setzen S_1 als die kleinste, funktional abgeschlossene Teilmenge in M an, die m_1 enthält. Wir wählen ein Element

$n_1 \in N$ aus der m_1 entsprechenden Äquivalenzklasse (wenn also α die Klasse von m_1 charakterisiert, so wählt man ein Element n_1, das α erfüllt) und setzen

$$\psi_1(m_1) := n_1$$

und definieren für jedes formal-zusammengesetzte Funktionssymbol F

$$\psi_1(F^M(m_1)) := F^N(\psi_1(m_1)) = F^N(n_1).$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert. Ist nämlich

$$m = F^M(m_1) = G^M(m_1),$$

so gilt in M

$$\alpha x \to F(x) = G(x)\,,$$

wobei α ein Ausdruck ist, der die Äquivalenzklasse zu m_1 charakterisiert, da dies für m_1 gilt und daher auch für alle dazu elementar äquivalenten Elemente. Es gilt dann auch die entsprechende Allaussage und diese gilt dann auch bei Interpretation über N. Daher ist

$$F^N(n_1) = G^N(n_1).$$

Wir müssen zeigen, dass ein Homomorphismus vorliegt. Die Verträglichkeit mit den Funktionssymbolen folgt unmittelbar aus der Definition der Abbildung. Ferner wird jedes Element zu einem Element aus der entsprechenden Äquivalenzklasse abgebildet. Nach (dem Beweis zu) Lemma 16.13 und wegen der elementaren Äquivalenz berücksichtigt ψ daher die Relationen. Dies gilt in beide Richtungen, d.h. eine Relation trifft auf ein Tupel genau dann zu, wenn dies auf das Bildtupel zutrifft. Die Abbildung ist injektiv: Zu zwei Elementen $m, m' \in S_1$ gibt es zusammengesetzte Funktionssymbole F und G mit $m = F^M(m_1)$ und $m' = G^M(m_1)$ Bei $m \neq m'$ gilt

$$\vDash \forall x\,(\alpha \to Fx \neq Gx)\ ,$$

da dies bei Interpretation von x durch m_1 gilt, und dies gilt auch in N. Die Abbildung ist surjektiv auf das Bild, also liegt wegen der Äquivalenz bei den Relationen insgesamt ein Isomorphismus vor.

Es seien nun S_j und ψ_j schon konstruiert und $S_j \neq M$. Wir wählen $m_{j+1} \in M \setminus S_j$ und betrachten die funktionale Hülle von $S_j \cup \{m_{j+1}\}$. Wir betrachten die Ausdrucksmenge Γ_{j+1} aller Ausdrücke β, für die

$$I\frac{m_1,\ldots,m_k}{x_1,\ldots,x_k}\frac{m_{j+1}}{y} \vDash \beta$$

mit $m_1,\ldots,m_k \in S_j$ gilt, wobei x_i und y die freien Variablen von β seien. Es gilt dann insbesondere

$$I\frac{m_1,\ldots,m_k}{x_1,\ldots,x_k} \vDash \exists y\beta$$

Daher gilt nach Satz 16.7 (angewendet auf den Isomorphismus ψ_j mit $n_i = \psi_j(m_i)$) auch

$$J\frac{n_1,\ldots,n_k}{x_1,\ldots,x_k} \vDash \exists y\beta\,,$$

und insbesondere gibt es ein (von β abhängiges) $n \in N$ mit

$$J\frac{n_1, \ldots, n_k}{x_1, \ldots, x_k}\frac{n}{y} \models \beta\,.$$

Dann gibt es auch ein $n \in N$, das man für alle β nehmen kann. Für jedes einzelne β ist nämlich die erfüllende Elementmenge nicht leer, und wenn der Durchschnitt über alle β leer wäre, dann schon für eine endliche Teilmenge und dann auch für die endliche Konjunktion darüber. Sei n_{j+1} ein solches Element. Wir setzen nun

$$\psi_{j+1}(m_{j+1}) \,:=\, n_{j+1}$$

und definieren

$$\psi_{j+1}(F^M(m_1, \ldots, m_k, m_{j+1})) \,:=\, F^N(n_1, \ldots, n_k, n_{j+1}).$$

Die Wohldefiniertheit von ψ_{j+1}, die Verträglichkeit mit den Funktionssymbolen und mit den Relationssymbolen (in beide Richtungen) sowie die Bijektivität und damit die Isomorphieeigenschaft folgt wie oben.

Da M endlich ist, erhalten wir, wenn wir diesen Konstruktionsschritt iterieren, insgesamt eine injektive Abbildung

$$\psi\colon\, M \longrightarrow N.$$

Da M und N gleich viele Elemente besitzen, ist diese auch surjektiv und insgesamt erhalten wir einen Isomorphismus. □

Nichtstandardmodelle

Definition 17.4. Es sei M eine fixierte S-Struktur (das *Standardmodell*) über einem Symbolalphabet S. Dann nennt man eine weitere S-Struktur M', die zu M *elementar äquivalent*, aber nicht zu M *S-isomorph* ist, ein *Nichtstandardmodell* von M.

Bemerkung 17.5. So formuliert ist diese Definition für jedes Modell M anwendbar. Man verwendet sie aber eigentlich nur dann, wenn ein wohlbestimmtes „prominentes" Modell M ausgezeichnet ist. Das Standardmodell ist dann in der Regel durch den Kontext festgelegt. Im zahlentheoretischen Kontext ist $\mathbb{N}$ das Standardmodell, die entsprechenden Nichtstandardmodelle heißen *Nichtstandardmodelle der Arithmetik*, die Untersuchung solcher Modelle heißt *Nichtstandardarithmetik*. Im analytschen Kontext sind die reellen Zahlen das Standardmodell, die entsprechenden Nichtstandardmodelle heißen *Nichtstandardmodelle der reellen Zahlen*; man spricht von *Nichtstandardanalysis*.

Es ist keineswegs selbstverständlich, dass es Nichtstandardmodelle gibt. Dies ergibt sich, und zwar ganz allgemein für jede unendliche Struktur, aus einer Reihe von Überlegungen, die an den Vollständigkeitssatz anschließen. Ein wesentlicher Punkt ist dabei, dass man zwar die Unendlichkeit eines Modells durch ein erststufiges Axiomenschema beschreiben kann, nicht aber erststufig verschiedene Mächtigkeiten unterscheiden kann. Zu $n \in \mathbb{N}$ beschreibt die Aussage

$$\alpha_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\wedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j) \right),$$

dass es mindestens n verschiedene Elemente gibt (d.h. diese Aussage ist interpretiert in einem Modell M genau dann richtig, wenn M mindestens n Elemente besitzt). Die Ausdrucksmenge

$$\Gamma_\infty = \{\alpha_n | \, n \in \mathbb{N}\}$$

beschreibt daher die Unendlichkeit einer Menge. Aufgabe 15.23 zeigt, dass es Nichtstandardmodelle der Arithmetik gibt und Aufgabe 15.22 zeigt (das Argument werden wir gleich wiederholen), dass es abzählbare Modelle gibt, die zu den reellen Zahlen elementar äquivalent sind. Man spricht von reell-abgeschlossenen Körpern.

Reell-abgeschlossene Körper

Beispiel 17.6. Die Symbolmenge S bestehe aus $0, 1, +, \cdot$ (und abzählbar unendlich vielen Variablen), die in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in natürlicher Weise interpretiert werden. Die Ausdrucksmenge

$$\Gamma = \mathbb{R}^{\vDash}$$

ist somit widerspruchsfrei. Der Beweis zu Lemma 15.3 zeigt, dass es dann eine abzählbare Symbolerweiterung $S' \supseteq S$ und eine S'-Ausdrucksmenge Γ' gibt, die Beispiele enthält (es ist nicht selbstverständlich, ob Γ selbst Beispiele enthält. Da es überabzählbar viele reelle Zahl gibt, liegt nicht jede reelle Zahl im Bild der Terminterpretation, so dass man Lemma 14.5 nicht anwenden kann), und die nach Lemma 15.4 zu einer maximal widerspruchsfreien Ausdrucksmenge ergänzt werden kann. Nach dem Satz von Henkin gibt es ein erfüllendes Modell, das aus Identifizieren von Termen entsteht. Da die Termmenge abzählbar ist, ist auch dieses Modell abzählbar. Es gibt daher ein abzählbares Nichtstandardmodell der reellen Zahlen.

Die Menge der rationalen Zahlen bilden einen abzählbaren geordneten Körper, aber kein Nichtstandardmodell der reellen Zahlen, da ja beispielsweise die Aussage $\exists x(x^2 = 2)$ in $\mathbb{R}$ gilt, aber nicht in $\mathbb{Q}$. Wichtige erststufige Aussagen, die in $\mathbb{R}$ und damit auch in jedem Nichtstandardmodell gelten, fassen wir in folgender Proposition zusammen.

Proposition 17.7. *Für die reellen Zahlen gelten folgende Aussagen über dem Symbolalphabet*[1] $S = \{0, 1, +, \cdot, x_n, n \in \mathbb{N}\}$

(1) *Die Axiome eines*[2] *angeordneten Körpers.*

[1]Um die Lesbarkeit zu erhöhen benutzen wir auch andere Variablennamen.

[2]Die Beziehung $u \geq v$ wird durch $\exists t(t^2 = u - v)$ erklärt. Alternativ kann man die Symbolmenge um $\geq$ ergänzen.

(2) *Für jedes gerade $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\forall x \left(\exists y \left((y^n = x) \vee (y^n = -x) \right) \right) .$$

(3) *Für jedes ungerade $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\forall c_0 \forall c_1 \ldots \forall c_n \left((c_n \neq 0) \rightarrow \exists x \left(c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0 \right) \right) .$$

(4) *Für jeden S-Ausdruck α in einer freien Variablen x gilt*

$$\exists x \alpha \wedge \exists b \forall x \left(\alpha \rightarrow x \leq b \right) \rightarrow \exists s \left(\forall c \forall x \left(\alpha \rightarrow x \leq c \right) \rightarrow s \leq c \right) .$$

(5) *Für jeden S-Ausdruck α in einer freien Variablen x gilt*

$$\Big(\exists x \alpha \wedge \exists x \neg \alpha \wedge \forall x \forall y \left(x \leq y \rightarrow \left(\alpha \frac{y}{x} \rightarrow \alpha \right) \right) \wedge$$
$$\forall x \forall y \left(y \leq x \rightarrow \left(\neg \alpha \frac{y}{x} \rightarrow \neg \alpha \right) \right) \Big) \rightarrow \exists s \left(\forall x \left(\alpha \rightarrow x \leq s \right) \wedge \forall x \left(\neg \alpha \rightarrow x \geq s \right) \right) .$$

Beweis. (1) ist in der Axiomatik der reellen Zahlen enthalten. (2) folgt aus wiederholter Anwendung von Satz 7.4 (Analysis (Osnabrück 2013-2015)). (3) folgt aus dem Zwischenwertsatz, der Stetigkeit von Polynomen und dem Verhalten von Polynomen von ungeradem Grad gegen $\pm\infty$. (4) ist eine Formulierung von Satz 7.5 (Analysis (Osnabrück 2013-2015)) für solche Teilmengen, die in der ersten Stufe beschrieben werden können. (5) folgt aus dem Dedekindschen Schnittaxiom. □

Diese Eigenschaften (insbesondere die beiden letzten) sind ein erststufiger Ersatz für die Vollständigkeit (ähnlich wie das Axiomenschema der Induktion in den erststufigen Peano-Axiomen ein Ersatz für die zweitstufige Induktion der Dedekind-Peano Axiome ist). Das Archimedes-Axiom, also dass es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine natürliche Zahl $n \geq x$ gibt, lässt sich nicht erststufig charakterisieren, da dies für die natürlichen Zahlen nicht möglich ist. Wir betrachten zu $n \in \mathbb{N}$ den Ausdruck

$$p_n = \exists x \left(x \geq n \right) ,$$

wobei n durch die n-fache Addition der 1 mit sich selbst repräsentiert wird. Eine Aussage wie „$\exists x \forall n (x \geq n)$“, was nichtarchimedisch bedeutet (n soll hier eine natürliche Zahl sein), ist nicht erststufig formulierbar.

Beispiel 17.8. Die Symbolalphabet S bestehe aus den Zeichen $0, 1, +, \cdot$ (und abzählbar unendlich vielen Variablen), die in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in natürlicher Weise interpretiert werden. Die Ausdrucksmenge

$$\Gamma = \mathbb{R}^{\vDash}$$

ist somit widerspruchsfrei. Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ den Ausdruck

$$\beta_n = x \geq n.$$

Es sei Γ' die Vereinigung von Γ mit $\{\beta_n | \, n \in \mathbb{N}\}$. Jede endliche Teilmenge von Γ' ist erfüllbar (nämlich in $\mathbb{R}$), also ist nach Korollar 15.9 auch Γ' erfüllbar. Es gibt also eine S-Struktur M, in der alle erststufigen Sätze von $\mathbb{R}$ gelten und auch alle $x \geq n$ bei geeigneter Belegung gelten, d.h. es gibt ein Element $m \in M$, das jenseits jeder natürlichen Zahl liegt. Insbesondere ist M ein nicht-archimedisch angeordneter Körper.

DEFINITION 17.9. Ein angeordneter Körper K heißt *reell-abgeschlossen*, wenn folgende Eigenschaften gelten.

(1) Jedes nichtnegative Element aus K besitzt eine Quadratwurzel in K.
(2) Jedes Polynom $P \in K[X]$ mit ungeradem Grad besitzt in K eine Nullstelle.

Man kann zeigen, dass ein reell-abgeschlossener Körper K elementar äquivalent zu den reellen Zahlen ist und insbesondere die oben angeführten Eigenschaften besitzt. Eine wichtige Eigenschaft ist ferner, dass $K[i]$ algebraisch abgeschlossen ist (d.h. durch Hinzunahme eines Elementes i mit $i^2 = -1$ wird der Körper algebraisch abgeschlossen). Ein (abzählbares Modell) eines reell-abgeschlossenen Körpers sind die reellen algebraischen Zahlen, also alle reellen Zahlen, die Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten sind. Dies ist zugleich der kleinste reell-abgeschlossene Körper. Da die Zahlen π und e transzendent sind, folgt, dass diese Zahlen nicht erststufig charakterisierbar sind. Eine Besonderheit der Theorie der reell-abgeschlossenen Körper ist, dass es dafür eine Entscheidungsprozedur gibt, d.h. es gibt einen maschinell durchführbaren Algorithmus, die *Quantorenelimination*, der für jeden Ausdruck α über der erststufigen Sprache zur Symbolmenge $\{0, 1, +, \cdot, \geq\}$ entscheidet, ob α aus den Axiomen ableitbar ist (äquivalent, in jedem reell-abgeschlossenen Körper gilt) oder nicht. Es gibt also prinzipiell keine erststufig formulierbaren „substantiellen Probleme“ für die reellen Zahlen.