Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 0

Die folgenden Aufgaben sind nicht abzugeben. In ihnen geht es um Mengen und Abbildungen, und sie werden in der ersten Übungsstunde besprochen. Wir erinnern dabei auch an einige grundlegende Definitionen, die schon bekannt sind.

DEFINITION 1. Seien M und L zwei Mengen. Eine *Abbildung* F von M nach N ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge M genau ein Element der Menge L zugeordnet wird. Das zu $x \in M$ eindeutig bestimmte Element wird mit $F(x)$ bezeichnet. Die Abbildung drückt man als Ganzes häufig durch

$$F : M \longrightarrow L,\, x \longmapsto F(x)\,,$$

aus.

DEFINITION 2. Es seien M und L Mengen und es sei

$$F : M \longrightarrow L,\, x \longmapsto F(x)\,,$$

eine Abbildung. Dann heißt F

• *injektiv*, wenn für je zwei verschiedene (!) Elemente $x, y \in M$ auch $F(x)$ und $F(y)$ verschieden sind.

• *surjektiv*, wenn es für jedes $z \in L$ mindestens ein Element $x \in M$ gibt mit $F(x) = z$.

• *bijektiv*, wenn F sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

AUFGABE 1. Seien M, N, L Mengen und

$$f : M \longrightarrow N \text{ und } g : N \longrightarrow L$$

Abbildungen mit der Verknüpfung

$$g \circ f : M \longrightarrow L,\, x \longmapsto g(f(x))\,.$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist f auch injektiv.

AUFGABE 2. Seien M, N, L Mengen und

$$f : M \longrightarrow N \text{ und } g : N \longrightarrow L$$

Abbildungen mit der Verknüpfung

$$g \circ f : M \longrightarrow L,\, x \longmapsto g(f(x))\,.$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

Zeige durch Beispiele, dass bei den beiden vorhergehenden Aufgaben die Umkehrung nicht gilt.

Für eine Abbildung gibt es mehrere Darstellungsmöglichkeiten, z.B. Wertetabellen, Pfeildiagramme, Kuchendiagramm, Graph einer Abbildung. Dabei sind die Übergänge zwischen der formalen Definition einer Abbildung und den visuellen Realisierungen fließend. In der Mathematik wird eine Abbildung zumeist durch eine Abbildungsvorschrift beschrieben, die es erlaubt, die Werte der Abbildung zu berechnen.

Definition 3. Es seien zwei Mengen M und L gegeben. Dann nennt man die Menge

$$M \times L = \{(x, y) : \, x \in M, \, y \in L\}$$

die *Produktmenge* der beiden Mengen.

Man beachte, dass es dabei auf die Reihenfolge ankommt.

Aufgabe 3. Seien M, N, L Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\operatorname{Abb}(M \times N, L) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, \operatorname{Abb}(N, L)) .$$

Man mache sich diese Situation für $M = N = [0, 1]$ und $L = \mathbb{R}$ klar.

Aufgabe 4. Seien M, N, L Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\operatorname{Abb}(M, N \times L) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, N) \times \operatorname{Abb}(M, L) .$$

Definition 4. Es seien M und L Mengen und es sei $f : M \to L$ eine Abbildung. Dann nennt man

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : \, x \in M\} \subseteq M \times L$$

den *Graph* der Abbildung f.

Abbildungen und ihre Graphen sind im wesentlichen äquivalente Objekte. Formal kann man auch Abbildungen als Graphen (spezielle Relationen) einführen. Man muss den Graph von seiner visuellen Realisierung unterscheiden, eine solche ist nicht immer möglich.

Aufgabe 5. Wie kann man sich den Graph einer Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

und wie sich den Graph einer Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

vorstellen?

Aufgabe 6. Skizziere den Graph der reellen Addition

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x + y\,,$$

und den Graph der reellen Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y\,.$$

Aufgabe 7. Es seien M und L Mengen und es sei

$$f : M \longrightarrow L$$

eine Abbildung mit dem Graph $\Gamma_f \subseteq M \times L$. Zeige, dass die Abbildung

$$\psi = \mathrm{id} \times f : M \longrightarrow M \times L,\ x \longmapsto (x, f(x))\,,$$

eine Bijektion zwischen M und dem Graphen Γ_f induziert. Was ist die Verknüpfung von ψ mit der zweiten Projektion

$$M \times L \longrightarrow L,\ (x, y) \longmapsto y\,?$$

Bei einer Verknüpfung auf einer Menge M, also einer Abbildung

$$M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto x \circ y\,,$$

bezeichnet man eine (vollständige) Wertetabelle auch als *Verknüpfungstafel.* In einer solchen Tabelle stehen sowohl in der Kopfzeile als auch in der Kopfspalte (oder Leitspalte) die (linear geordneten) Elemente aus M, und in der Überkreuzungsstelle zu x und y steht der Verknüpfungswert $x \circ y$ als Eintrag. Dabei muss man festlegen, welche Ordnung zwischen den Zeilen und Spalten gilt, also ob im Kreuzungspunkt der x- ten Spalte und der y-ten Zeile $x \circ y$ oder $y \circ x$ steht. Diese Festlegung ist insbesondere wichtig, da bei Matrizen und Koordinatensystemen andere Konventionen gelten.

Aufgabe 8. Sei M die Menge der Abbildungen einer zweielementigen Menge in sich selbst, also

$$M = \{f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}\}\,.$$

Benenne die Elemente aus M und lege eine Wertetabelle für die Verknüpfung auf M an, die durch die Hintereinanderschaltung von Abbildungen definiert ist.

Definition 5. Zu einer Menge M nennt man die Menge aller Teilmengen von M die *Potenzmenge* von M. Sie wird mit

$$\mathfrak{P}\,(M)$$

bezeichnet.

Aufgabe 9. Sei M eine Menge. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\mathfrak{P}\,(M) \text{ und } \mathrm{Abb}\,(M, \{0, 1\})\,.$$

Aufgabe 10. Sei M eine Menge, die als disjunkte Vereinigung

$$M = A \uplus B$$

gegeben ist. Definiere eine Bijektion zwischen den Potenzmengen,

$$\mathfrak{P}(M) \text{ und } \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B).$$

Wie verhalten sich diese beiden Mengen, wenn A und B zwar eine Vereinigung von M ergeben, aber nicht disjunkt sind, und umgekehrt.