Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 5

Wir beginnen mit drei Aufwärmaufgaben.

Aufgabe 1. Beweise Lemma 5.3.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe und sei $\varphi : G \to G$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass die Menge der Fixpunkte von φ eine Untergruppe von G bildet.

Aufgabe 3. Es sei G eine additiv geschriebene kommutative Gruppe. Zeige, dass die Negation, also die Abbildung

$$G \longrightarrow G,\, x \longmapsto -x\,,$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass diese Matrix einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Q}^2$ nach $\mathbb{Q}^2$ und ebenso von $\mathbb{Z}^2$ nach $\mathbb{Z}^2$ definiert. Untersuche diese beiden Gruppenhomomorphismen in Hinblick auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Es seien $G_1, \ldots, G_n$ Gruppen. Definiere eine Gruppenstruktur auf dem Produkt

$$G_1 \times \cdots \times G_n\,.$$

Es sei H eine weitere Gruppe. Zeige, dass eine Abbildung

$$\varphi : H \longrightarrow G_1 \times \cdots \times G_n,\, x \longmapsto \varphi(x) = \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\,,$$

genau dann ein Gruppenhomomorphismus ist, wenn alle Komponenten φ_i Gruppenhomomorphismen sind.

Aufgabe 6. (1 Punkt)

Sei G eine (multiplikativ geschriebene) kommutative Gruppe und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann das Potenzieren

$$G \longrightarrow G,\ x \longmapsto x^n\,,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Bestimme die Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Q}, +, 0)$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Stifte einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von der Gruppe der komplexen Zahlen ohne null $(\mathbb{C}, 1, \cdot)$ und der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen $(\mathbb{R}_+, 1, \cdot)$.

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Betrachte die Gruppe der komplexen Zahlen ohne null, $\mathbb{C}^\times = (\mathbb{C}, 1, \cdot)$. Bestimme für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Kern des Potenzierens

$$\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times,\ z \longmapsto z^n\,.$$

Sind diese Gruppenhomomorphismen surjektiv?

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Seien V und W zwei $\mathbb{Q}$-Vektorräume und sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass φ bereits $\mathbb{Q}$-linear ist.

Die letzte Aufgabe ist eher zum Nachdenken als zum Lösen gedacht und ist nicht abzugeben.

Aufgabe 11. Gibt es Gruppenhomomorphismen

$$(\mathbb{R}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, 0)\,,$$

die nicht $\mathbb{R}$-linear sind?