

## Einführung in die mathematische Logik

### Arbeitsblatt 5

### Übungsaufgaben

AUFGABE 5.1. Zeige mit Hilfe des Auswahlaxioms, dass es zu jeder Äquivalenzrelation  $\sim$  auf einer Menge  $M$  ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen gibt.

AUFGABE 5.2. Es sei  $M$  eine Menge und  $I$  die Menge der echten Teilmengen von  $M$ , also

$$I = \{T \subseteq M \mid T \neq \emptyset \text{ und } T \neq M\} .$$

Diese Menge ist durch die Inklusion eine geordnete Menge. Bestimme die minimalen und die maximalen Elemente von  $I$ .

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Es seien  $(M_1, \leq_1)$  und  $(M_2, \leq_2)$  zwei Mengen, auf denen jeweils eine Ordnung definiert ist. Eine Abbildung

$$F: M_1 \longrightarrow M_2, x \longmapsto F(x),$$

heißt *ordnungstreu* (oder *monoton*), wenn für alle  $x, x' \in M_1$  mit  $x \leq_1 x'$  stets auch  $F(x) \leq_2 F(x')$  gilt.

AUFGABE 5.3. Es sei  $(M, \leq)$  eine geordnete Menge und  $\mathfrak{P}(M)$  die Potenzmenge von  $M$ . Zeige, dass die Abbildung

$$M \longrightarrow \mathfrak{P}(M), x \longmapsto \{y \in M \mid y \leq x\},$$

ordnungstreu und injektiv ist, wobei die Potenzmenge mit der Inklusion versehen ist.

AUFGABE 5.4. Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $I \subseteq R$  ein Ideal in  $R$ . Zeige, dass  $I$  genau dann ein maximales Ideal ist, wenn der Restklassenring  $R/I$  ein Körper ist.

AUFGABE 5.5. Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $F$  ein topologischer Filter auf  $X$  mit  $\emptyset \notin F$ . Zeige, dass es einen Ultrafilter  $G \supseteq F$  gibt.

Wenn man die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  mit der diskreten Topologie versieht, so dass also jede Teilmenge offen ist, so ist ein topologischer Filter auf  $\mathbb{N}$  einfach eine Teilmenge  $F \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{N})$  mit

- (1)  $\mathbb{N} \in F$ .
- (2) Mit  $U \in F$  und  $U \subseteq V$  ist auch  $V \in F$ .
- (3) Mit  $U \in F$  und  $V \in F$  ist auch  $U \cap V \in F$ .

AUFGABE 5.6. Ein Filter  $F \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{N})$  ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{N}$  entweder  $T \in F$  oder  $\mathbb{N} \setminus T \in F$  gilt

Die einfachen Ultrafilter in  $\mathbb{N}$  werden in folgender Aufgabe beschrieben.

AUFGABE 5.7. Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine fixierte Zahl. Dann ist

$$F = \{T \subseteq \mathbb{N} \mid n \in T\}$$

ein Ultrafilter.

AUFGABE 5.8. Zeige, dass es in  $\mathbb{N}$  Ultrafilter gibt, die keine endlichen Teilmengen enthalten.

AUFGABE 5.9. Wir betrachten den Folgenring  $R = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Zu einer Folge  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in R$  sei

$$Z(x) = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = 0\}.$$

Zeige, dass über die Zuordnungen

$$I \longmapsto \{T \subseteq \mathbb{N} \mid T = Z(x) \text{ für ein } x \in I\}$$

und

$$F \longmapsto \{x \in R \mid Z(x) \in F\}$$

sich die Ideale aus  $R$  und die Filter aus  $\mathbb{N}$  entsprechen.

AUFGABE 5.10. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{G} = \left\{ T \subseteq \mathbb{N}_+ \mid \sum_{n \in T} \frac{1}{n} \text{ ist eine divergente Reihe} \right\}.$$

Ist  $\mathcal{G}$  ein Filter?

AUFGABE 5.11. Man mache sich an den folgenden Beispielen klar, dass der Satz von Hamel keineswegs selbstverständlich ist.

- (1) Die reellen Zahlen als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum betrachtet.

(2) Die Menge der reellen Folgen

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R}\}.$$

(3) Die Menge aller stetigen Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ .

AUFGABE 5.12. Betrachte die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen  $\ln p$ , wobei  $p$  durch die Menge der Primzahlen läuft, linear unabhängig ist.

AUFGABE 5.13. Beweise durch Induktion, dass die natürliche Ordnung auf den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  eine Wohlordnung ist.

AUFGABE 5.14. Zeige, dass die natürliche Ordnung auf den ganzen Zahlen keine Wohlordnung ist.

AUFGABE 5.15. Zeige, dass die natürliche Ordnung auf den reellen Zahlen keine Wohlordnung ist.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 5.16. (3 Punkte)

Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{F} = \left\{ T \subseteq \mathbb{N}_+ \mid \sum_{n \notin T} \frac{1}{n} \text{ ist eine konvergente Reihe} \right\}.$$

Zeige, dass  $\mathcal{F}$  ein Filter ist.

AUFGABE 5.17. (3 Punkte)

Zeige, dass sich bei der in Aufgabe 5.9 beschriebenen Korrespondenz maximale Ideale und Ultrafilter entsprechen.

AUFGABE 5.18. (3 Punkte)

Definiere eine Wohlordnung auf der Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ .

AUFGABE 5.19. (5 Punkte)

Es sei  $(M, \preccurlyeq)$  eine total geordnete Menge, die sowohl nach unten als auch nach oben wohlgeordnet ist. Zeige, dass  $M$  endlich ist.

## AUFGABE 5.20. (2 Punkte)

Beweise den *Endlichkeitssatz für die Aussagenlogik*: Wenn die Aussage  $\alpha$  aus der Aussagenmenge  $\Gamma \subseteq L^V$  folgt, dann gibt es eine endliche Teilmenge  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ , aus der diese Aussage folgt.