Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 2

Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1. Zeige, dass das erste Symbol in jeder Aussage aus L^V entweder eine Aussagevariable $p \in V$ oder das Negationszeichen $\neg$ oder eine linksseitige Klammer (ist.

Aufgabe 2.2. Beweise durch Induktion über den rekursiven Aufbau der Sprache L^V, dass in jeder Aussage $\alpha \in L^V$ die Anzahl der linken Klammern mit der Anzahl der rechten Klammern übereinstimmt.

Aufgabe 2.3. Zeichne einen Abstammungsbaum für die Aussage

$$((p) \wedge (\neg(q))) \wedge (\neg(r)) .$$

Aufgabe 2.4. Zeichne einen Abstammungsbaum für die Aussage

$$((\neg(\neg(p))) \leftrightarrow (\neg(q))) \vee ((p) \rightarrow ((\neg(r)) \wedge (\neg(q)))) .$$

Aufgabe 2.5. Es sei ein aussagenlogischer Ausdruck der Form

$$(...) * (...)$$

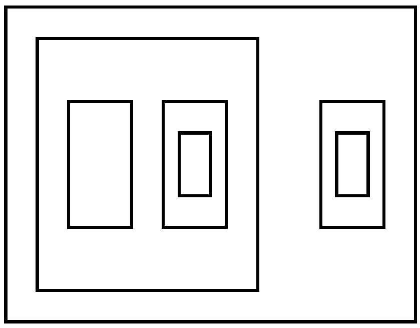
gegeben, wobei $* = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ist. Es sei vorausgesetzt, dass die Klammer) links von $*$ die linke öffnende Klammer abschließt (wie ist das zu definieren?). Zeige, dass dann die Zeichenketten innerhalb der beiden Klammern Aussagen sind, und dass der Gesamtausdruck durch einen dritten Schritt im rekursiven Aufbau der Sprache aus diesen beiden Aussagen entstanden ist. Zeige, dass dies ohne die Klammervoraussetzung nicht der Fall sein muss.

Aufgabe 2.6. Zeige, dass der letzte Konstruktionsschritt einer Aussage eindeutig bestimmt ist. Folgere, dass sich die rekursive Entstehung einer Aussage eindeutig rekonstruieren lässt.

Aufgabe 2.7. Eine Geschenkfabrik verfügt über leere, offene Schachteln (unterschiedlicher Größe) und über Maschinen, die die beiden folgenden Abläufe durchführen können.

(1) Eine offene Schachtel schließen.
(2) Eine geschlossene Schachtel in eine größere offene Schachtel hineinlegen.

Ein Produkt der Fabrik ist das Ergebnis aus diesen (beliebig verschachtelten Abläufen).



(1) Definiere die Schachtelanzahl eines Produkts der Fabrik.
(2) Definiere die Verschachtelungstiefe eines Produkts der Fabrik.
(3) Definiere die Arbeitsschrittanzahl eines Produkts der Fabrik.
(4) Bestimme die Schachtelanzahl, die Verschachtelungstiefe und die Arbeitsschrittanzahl des gezeigten Produkts (die Schachteln seien geschlossenen).
(5) Zeige, dass jedes Produkt der Fabrik nur maximal eine offene Schachtel enthält.

Aufgabe 2.8. Bestimme den Wahrheitswert der Aussage

$$((\neg(\neg(p))) \leftrightarrow (\neg(q))) \vee ((p) \rightarrow ((\neg(r)) \wedge (\neg(q))))$$

bei der Belegung $\lambda(p) = 0$ und $\lambda(q) = \lambda(r) = 1$.

Aufgabe 2.9. Finde möglichst einfache aussagenlogische Ausdrücke, die die folgenden tabellarisch dargestellten Wahrheitsfunktionen ergeben.

α	β	?
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

α	β	?
w	w	f
w	f	f
f	w	w
f	f	f

α	β	?
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Die folgende Aufgabe verwendet den Begriff abzählbar.

Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn sie leer ist oder wenn es eine surjektive Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow M$$

gibt.

Für diesen Begriff und das Mächtigkeitskonzept im Allgemeinen siehe den Anhang über Mächtigkeiten.

Eine Menge M ist genau dann abzählbar unendlich, wenn es eine bijektive Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{N} \longrightarrow M$$

gibt. Die Menge der rationalen Zahlen sind abzählbar unendlich, die Menge der reellen Zahlen nicht.

Aufgabe 2.10. Es sei A ein abzählbares Alphabet. Zeige, dass auch die Menge A^* der Wörter über A abzählbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.11. (2 Punkte)

Zeichne einen Abstammungsbaum für die Aussage

$$(((\neg(\neg(p))) \rightarrow (\neg(q))) \vee (\neg(r))) \leftrightarrow ((\neg(r)) \wedge (q))\,.$$

Aufgabe 2.12. (2 Punkte)

Bestimme den Wahrheitswert der Aussage

$$(((\neg(\neg(p))) \rightarrow (\neg(q))) \vee (\neg(r))) \leftrightarrow ((\neg(r)) \wedge (q))$$

bei der Belegung $\lambda(p) = \lambda(r) = 0$ und $\lambda(q) = 1$.

Aufgabe 2.13. (3 Punkte)

Es seien $p_1, \dots, p_n$ Aussagevariablen und $\beta_1, \dots, \beta_n$ Aussagen. Zeige durch Induktion über den Aufbau der aussagenlogischen Sprache, dass man zu jeder Aussage α in den gegebenen Variablen eine Aussage erhält, wenn man jedes Vorkommen von p_i in α durch β_i ersetzt.

Aufgabe 2.14. (4 Punkte)

Beweise durch Induktion über den rekursiven Aufbau der Sprache L^V, dass in jeder Aussage $\alpha \in L^V$ und für jedes Symbol s in α, das keine Klammer ist, folgendes zutrifft: Links von s ist die Anzahl der linken Klammern mindestens so groß wie die Anzahl der rechten Klammern.