Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 30

setcountersection30

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 30.1. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum, auf dem eine Gruppe G linear operiere. Es sei $W \subseteq V$ ein G-irreduzibler Untervektorraum und $U \subseteq V$ ein G-invarianter Untervektorraum. Zeige, dass $U \cap W$ gleich W oder gleich 0 ist.

Aufgabe 30.2. Zeige, dass zu jeder Darstellung einer Gruppe G in einen endlichdimensionalen K-Vektorraum V ein Charakter $G \to K^\times$ gehört.

Aufgabe 30.3. Es sei K ein Körper. Man gebe eine Darstellung von $\mathbb{Z}$ in einen endlichdimensionalen K-Vektorraum an, die nicht vollständig reduzibel ist.

Aufgabe 30.4. Es sei K ein Körper. Man gebe eine Darstellung von $(\mathbb{Q}^\times, \cdot, 1)$ in einen endlichdimensionalen K-Vektorraum an, die nicht vollständig reduzibel ist.

Aufgabe 30.5. Zeige, dass die additive Gruppe $(K, +, 0)$ nicht linear reduktiv ist.

Wir erinnern an zwei Definitionen für Matrizen.

Eine $n \times n$-Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} b_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & b_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

nennt man *obere Dreiecksmatrix*.

Eine $n \times n$-Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nennt man (obere) *Scherungsmatrix*.

Aufgabe 30.6. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Menge der invertierbaren $n \times n$-oberen Dreiecksmatrizen über K eine Untergruppe der $\mathrm{GL}_n(K)$ ist.

Aufgabe 30.7. Es sei K ein Körper und $\mathrm{ODG}_n(K)$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-oberen Dreiecksmatrizen über K. Zeige, dass es einen (natürlichen) surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon\ \mathrm{ODG}_n(K) \longrightarrow \left(K^\times, \cdot, 1\right)^n$$

gibt. Bestimme den Kern von φ.

Aufgabe 30.8. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Menge der invertierbaren $n \times n$-oberen Scherungsmatrizen über K eine Untergruppe der $\mathrm{SL}_n(K)$ ist.

Aufgabe 30.9. Es sei K ein Körper und $\mathrm{OSG}_n(K)$ die Gruppe der $n \times n$-oberen Scherungsmatrizen über K. Zeige, dass es einen (natürlichen) surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon\ \mathrm{OSG}_n(K) \longrightarrow (K, +, 0)^{n-1}$$

gibt. Bestimme den Kern von φ.

Zeige in den vorstehenden Aufgaben, dass jeweils eine lineare Gruppe (über einem nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossenen Körper) vorliegt, und dass die Gruppenhomomorphismen algebraisch definiert sind.

Aufgabe 30.10. Es sei K ein Körper und $\mathrm{OSG}_3(K)$ die Gruppe der 3×3-oberen Scherungsmatrizen über K. Zeige, dass es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathrm{OSG}_3(K) \longrightarrow K^2 \longrightarrow 0$$

gibt, und dass $\mathrm{OSG}_3(K)$ nicht isomorph zu K^3 ist.

Aufgabe 30.11. Es sei K ein Körper und es sei $\psi \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine Pseudoreflektion. Zeige, dass jede Konjugation von ψ ebenfalls eine Pseudoreflektion ist.

Aufgabe 30.12. Es sei K ein Körper, $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ eine Untergruppe und $H \subseteq G$ die von allen Pseudoreflektionen in G erzeugte Untergruppe. Zeige, dass H ein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 30.13. Es sei K ein Körper, $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ eine endliche Untergruppe, deren Ordnung eine Einheit in K sei, und $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Es sei $R = K[X_1, \ldots, X_n]^H$ der Invariantenring zu H, auf dem gemäß Proposition 5.1 (3) die Restklassengruppe G/H operiert. Zeige, dass es einen endlichdimensionalen Untervektorraum $W \subseteq R$ gibt, der R als K-Algebra erzeugt und auf dem die Operation von G/H linear ist.

Aufgabe 30.14. Wir betrachten die Gruppe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathrm{GL}_2(K)$$

(K sei ein Körper der Charakteristik $\neq 2$) mit dem Normalteiler $S_2 \subseteq G$. Man gebe für den Invariantenring $K[U,V]^{S_2}$ zwei Algebraerzeugendensysteme aus jeweils zwei Erzeugern an, derart, dass G/S_2 auf dem einen System linear operiert und auf dem anderen nicht.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 30.15. (5 Punkte)

Es sei K ein Körper und $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ eine endliche Untergruppe, deren Ordnung eine Einheit in K sei. Zeige, dass der Invariantenring $R = K[X_1, \ldots, X_n]^G$ auch als Invariantenring zu einer kleinen Gruppe $G' \subseteq \mathrm{GL}_n$ (K) auftritt.

Aufgabe 30.16. (8 Punkte)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass $(\mathbb{Z}, +, 0)$ keine lineare Gruppe über K ist.