Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Vorlesung 12

Stetige Funktionen

Den Abstand zwischen zwei reellen (oder komplexen) Zahlen x und x' bezeichnen wir mit $d(x,x') := |x - x'|$.

Bei einer Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

kann man sich fragen, inwiefern der Abstand in der Wertemenge durch den Abstand in der Definitionsmenge kontrollierbar ist. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $y = f(x)$ der Bildpunkt. Man möchte, dass für Punkte x', die „nahe" an x sind, auch die Bildpunkte $f(x')$ „nahe" an $f(x)$ sind. Schon lineare Funktionen mit unterschiedlicher Steigung zeigen, dass die „Nähe" im Bildbereich nicht mit der „Nähe" im Definitionsbereich direkt verglichen weden kann. Die Zielsetzung ist vielmehr, dass es zu einer gewünschten Genauigkeit im Bildbereich überhaupt eine Ausgangsgenauigkeit gefunden werden kann, die sichert, dass die Funktionswerte innerhalb der gewünschten Genauigkeit beieinander liegen.

Um diese intuitive Vorstellung zu präzisieren, sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dieses ϵ repräsentiert eine „gewünschte Zielgenauigkeit". Die Frage ist dann, ob man ein $\delta > 0$ finden kann (eine „Startgenauigkeit") mit der Eigenschaft, dass für alle x' mit $d(x,x') \leq \delta$ die Beziehung $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ gilt. Dies führt zum Begriff der stetigen Abbildung, den wir parallel für die reellen und die komplexen Zahlen entwickeln. Wir verwenden für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ das gemeinsames Symbol $\mathbb{K}$ und wir betrachten Funktionen

$$\varphi\colon T \longrightarrow \mathbb{K},$$

wobei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge ist. Wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ könnte man sich auf $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ beschränken. Allerdings ist die reelle Situation etwas suggestiver und viele komplexe Fragestellungen lassen sich einfach auf den reellen Fall zurückführen, so dass es durchaus erlaubt ist, sich zunächst auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zu beschränken.

Definition 12.1. Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge,

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion und $x \in T$. Man sagt, dass f *stetig* im Punkt x ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, dass für alle x' mit $d(x,x') \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ gilt. Man sagt, dass f *stetig* ist, wenn sie in jedem Punkt $x \in T$ stetig ist.

Bei T sollte man an den Definitionsbereich der Funktion denken. Typische Situationen sind, dass T ganz $\mathbb{K}$ ist, oder ein reelles Intervall, oder $\mathbb{R}$ ohne endlich viele Punkte und Ähnliches. Statt mit den nichnegativen reellen Zahlen ϵ und δ kann man genauso gut mit Stammbrüchen $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{m}$ arbeiten.

Beispiel 12.2. Eine konstante Funktion

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto c,$$

ist stetig. Zu jedem vorgegeben ϵ kann man hier ein beliebiges δ wählen, da ja ohnehin

$$d(f(x), f(x')) = d(c, c) = 0 \leq \epsilon$$

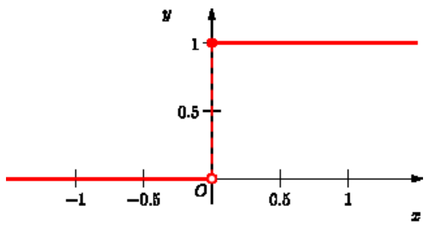
gilt.

Die Identität

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto x,$$

ist ebenfalls stetig. Zu jedem vorgegebenen ϵ und kann man hier $\delta = \epsilon$ wählen, was zu der Tautologie führt: Wenn $d(x, x') \leq \delta = \epsilon$, so ist

$$d(f(x), f(x')) = d(x, x') \leq \epsilon.$$



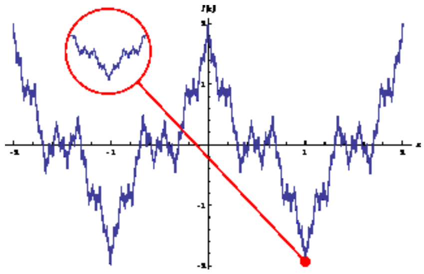
Beispiel 12.3. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ falls } x < 0\,, \\ 1 \text{ falls } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist im Nullpunkt 0 nicht stetig. Für $\epsilon = \frac{1}{2}$ und jedes beliebige positive δ gibt es nämlich negative Zahlen x' mit $d(0, x') = |x'| \leq \delta$. Für diese ist aber $d(f(0), f(x')) = d(1, 0) = 1 \not\leq \frac{1}{2}$.



Nicht jede stetige Funktion kann man zeichnen, auch nicht nach beliebiger Vergrößerung. Gezeigt wird eine Approximation einer Weierstraß-Funktion, die stetig ist, aber nirgendwo differenzierbar. Bei einer stetigen Funktion kann man zwar die Größe der Schwankungen im Bildbereich durch Einschränkungen im Definitionsbereich kontrollieren, die Anzahl der Schwankungen (die Anzahl der Richtungswechsel des Graphen) kann man aber nicht kontrollieren.

Die folgende Aussage bringt die Stetigkeit mit konvergenten Folgen in Verbindung.

Lemma 12.4. *Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge,*

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion und $x \in T$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *f ist stetig im Punkt x.*
(2) *Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.*

Beweis. Sei (1) erfüllt und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in T, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen (1) gibt es ein δ mit der angegebenen Eigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$d(x_n, x) \leq \delta\,.$$

Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0\,,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert. Sei (2) erfüllt. Wir nehmen an, dass f nicht stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ Elemente $z \in T$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand besitzt, der größer als ϵ ist. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. D.h. für jede natürliche Zahl gibt es ein $x_n \in T$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon\,.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenglieder zu $f(x)$ zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (2). □

Rechenregeln für stetige Funktionen

Lemma 12.5. *Es seien $S \subseteq \mathbb{K}$ und $T \subseteq \mathbb{K}$ Teilmengen und*

$$f\colon S \longrightarrow \mathbb{K}$$

und

$$g\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

Funktionen mit $f(S) \subseteq T$. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Wenn f in $x \in S$ und g in $f(x)$ stetig ist, so ist auch die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ in x stetig.*
(2) *Wenn f und g stetig sind, so ist auch $g \circ f$ stetig.*

Beweis. Die Aussage (1) ergibt sich direkt aus der Folgencharakterisierung der Stetigkeit. Daraus folgt auch (2). □

Lemma 12.6. *Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ und seien*

$$f, g\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g\colon T \longrightarrow \mathbb{K},\, x \longmapsto f(x) + g(x),$$

$$f - g\colon T \longrightarrow \mathbb{K},\, x \longmapsto f(x) - g(x),$$

$$f \cdot g\colon T \longrightarrow \mathbb{K},\, x \longmapsto f(x) \cdot g(x),$$

stetig. Für eine Teilmenge $U \subseteq T$, auf der g keine Nullstelle besitzt, ist auch die Funktion

$$f/g\colon U \longrightarrow \mathbb{K},\, x \longmapsto f(x)/g(x),$$

stetig.

Beweis. Dies ergibt sich aus der Folgencharakterisierung der Stetigkeit und Satz 8.10. □

Korollar 12.7. *Polynomfunktionen*

$$P\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\, x \longmapsto P(x),$$

sind stetig.

Beweis. Aufgrund von Beispiel 12.2 und Lemma 12.6 sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\, x \longmapsto x^n,$$

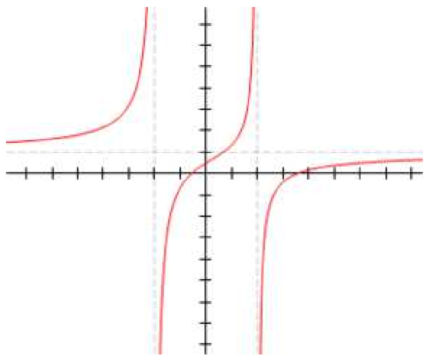
stetig. Daher sind auch für jedes $a \in \mathbb{K}$ die Funktionen

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\, x \longmapsto ax^n,$$

stetig und wiederum aufgrund von Lemma 12.6 sind auch alle Funktionen

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\, x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

stetig. □



Rationale Funktionen sind auf ihrer Definitionsmenge stetig.

KOROLLAR 12.8. *Es seien $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ zwei Polynome und es sei $U := \{x \in \mathbb{K} |\, Q(x) \neq 0\}$. Dann ist die rationale Funktion*

$$U \longrightarrow \mathbb{K},\, x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)},$$

stetig.

Beweis. Dies folgt aus Korollar 12.7 und Lemma 12.6. □

Grenzwerte von Funktionen

Eng verwandt mit dem Stetigkeitsbegriff ist der Begriff des Grenzwertes einer Funktion.

DEFINITION 12.9. Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{K}$ ein Punkt. Es sei

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann heißt $b \in \mathbb{K}$ *Grenzwert* (oder *Limes*) von f in a, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in T, die gegen a konvergiert, auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen b konvergiert. In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{x \to a} f(x) = b\,.$$

Dieser Begriff ist eigentlich nur dann sinnvoll, wenn es überhaupt Folgen in T gibt, die gegen a konvergieren. Dann heißt a ein *Berührpunkt* von T. In diesem Fall ist der Grenzwert, wenn er existiert, eindeutig bestimmt (andernfalls ist jeder Punkt ein Grenzwert).

Eine typische Situation ist die folgende: Es sei I ein reelles Intervall, $a \in I$ sei ein Punkt darin und es sei $T = I \setminus \{a\}$. Die Funktion sei auf T, aber nicht im Punkt a definiert, und es geht um die Frage, inwiefern man f zu einer sinnvollen Funktion $\tilde{f}$ auf ganz I fortsetzen kann. Dabei soll $\tilde{f}(a)$ durch f bestimmt sein. In Zusammenhang mit differenzierbaren Funktionen werden wir zu einer Funktion g im Punkt a die Steigung der Sekanten untersuchen, die durch $(a, g(a))$ und $(x, g(x))$, $x \neq a$, festgelegt sind. Diese Steigung ist durch $f(x) = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ gegeben, wobei dieser Ausdruck für $x = a$ nicht definiert ist. Der Grenzwert davon für $x \to a$ ist, falls er existiert, die Steigung der Tangente.

Lemma 12.10. *Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{K}$ ein Punkt. Es seien $f\colon T \to \mathbb{K}$ und $g\colon T \to \mathbb{K}$ Funktionen derart, dass die Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x \to a} g(x)$ existieren. Dann gelten folgende Beziehungen.*

(1) *Die Summe $f + g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist*
$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\,.$$
(2) *Das Produkt $f \cdot g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist*
$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)\,.$$
(3) *Es sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in T$ und $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$. Dann besitzt der Quotient f/g einen Grenzwert in a, und zwar ist*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\,.$$

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus Satz 8.10. □

Beispiel 12.11. Wir betrachten den Limes
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\,,$$
wobei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \geq -4$, ist. Für $x = 0$ ist der Ausdruck nicht definiert, und aus dem Ausdruck ist nicht direkt ablesbar, ob der Grenzwert existiert und welchen Wert er annimmt. Man kann den Ausdruck aber mit $\sqrt{x+4}+2$ erweitern, und erhält dann
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} &= \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}\\ &= \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}\\ &= \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}.$$

Aufgrund der Rechenregeln für Grenzwerte können wir den Grenzwert von Zähler und Nenner ausrechnen, und es ergibt sich insgesamt 1/4.

LEMMA 12.12. *Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{K}$ ein Punkt. Es sei $f\colon T \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $b \in \mathbb{K}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Es ist*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b\,.$$

(2) *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in T$ mit $d(x,a) \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x),b) \leq \epsilon$ folgt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 12.14. □

KOROLLAR 12.13. *Es sei $S \subseteq \mathbb{K}$, $a \in S$ und $T = S \setminus \{a\}$. Es sei $f\colon S \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Funktion f ist stetig in a.*
(2) *Es ist*

$$\lim_{x \in T} f(x) = f(a)\,.$$

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus Lemma 12.12 oder aus dem Folgenkriterium. □

Für eine stetige Funktion $f\colon T \to \mathbb{K}$ folgt daraus, dass sie sich zu einer stetigen Funktion $\tilde{f}\colon T \cup \{a\} \to \mathbb{K}$ (durch $\tilde{f}(a) = b$) genau dann fortsetzen lässt, wenn der Limes von f in a gleich b ist.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Heaviside.svg , Autor = Benutzer Lenny222 auf Commons, Lizenz = PD 2
Quelle = WeierstrassFunction.svg , Autor = Benutzer Eeyore22 auf Commons, Lizenz = PD 3
Quelle = RationalDegree2byXedi.gif , Autor = Benutzer Sam Derbyshire auf en. Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0 5