Prof. Dr. H. Brenner, Dr. L. Katthän **Osnabrück SS 2014**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 3

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1. Sei $S = \{A, B, C\}$. Betrachte die rekursiv definierte Teilmenge $T \subseteq S^*$, die wie folgt festgelegt wird.

(1) Jedes Element aus S gehört zu T.
(2) Wenn $X, Y \in T$ sind, so gehört auch XXY zu T.

Bestimme, welche der folgenden Wörter zu T gehören.

A, $ABABC$, $AABBB$, $AABAABA$, $AAAA$, $AABABAAB$, $AAAAAABBB$.

Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Jedes Element aus T besitzt eine ungerade Wortlänge.
(2) Jede ungerade Zahl kommt als Wortlänge eines Elements aus T vor.
(3) Es gibt Elemente in T, die auf mehrfache Weise generiert werden können.
(4) Jedes Wort $t \in T \setminus S$ beginnt mit zwei gleichen Buchstaben.

Aufgabe 3.2. Definiere zu jeder Aussage $\alpha \in L^V$ die Menge $\operatorname{Var}(\alpha)$ der in α vorkommenden Aussagevariablen.

Aufgabe 3.3. Zeige, dass die Interpretation einer Aussage $\alpha \in L^V$ nur von der Wahrheitsbelegung der in α vorkommenden Aussagevariablen abhängt.

Aufgabe 3.4. Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.[1]

(1) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$,
(2) $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$,
(3) $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$,
(4) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$,
(5) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$,
(6) $(\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow \alpha$.

[1] Wir verzichten hier und im Folgenden häufig auf Klammern, um die Lesbarkeit zu erhöhen. Gemeint sind immer die korrekt geklammerten Aussagen.

Aufgabe 3.5. Man beweise mittels Wahrheitstabellen die *Regeln von de Morgan*, nämlich dass

$$(\alpha \wedge \neg(\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow (\alpha \wedge \neg\beta) \wedge (\alpha \wedge \neg\gamma)$$

und

$$(\alpha \wedge \neg(\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow (\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\alpha \wedge \neg\gamma)$$

Tautologien sind.

Aufgabe 3.6. Es seien $p_1, \ldots, p_n$ Aussagevariablen und $\beta_1, \ldots, \beta_n$ Aussagen. Zeige, dass man, wenn man in einer allgemeingültigen Aussage α jedes Vorkommen von p_i durch β_i ersetzt, wieder eine allgemeingültige Aussage erhält. Zeige, dass die Umkehrung davon nicht gilt.

Aufgabe 3.7. Zeige, dass eine Aussage $\alpha \in L^V$ genau dann eine Kontraposition ist, wenn $\neg\alpha$ eine Tautologie ist.

Aufgabe 3.8. Man gebe möglichst viele Beispiele für aussagenlogische Kontradiktionen an.

Die folgenden Aufgaben verwenden den Begriff einer Äquivalenzrelation. Dieser ist für viele Konstruktionen in der Mathematik und in der mathematischen Logik entscheidend. Siehe den Anhang zu Äquivalenzrelationen.

Eine *Äquivalenzrelation* auf einer Menge M ist eine Relation $R \subseteq M \times M$, die die folgenden drei Eigenschaften besitzt (für beliebige $x, y, z \in M$).

(1) $x \sim x$ (*reflexiv*),
(2) aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$ (*symmetrisch*),
(3) aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ (*transitiv*).

Dabei bedeutet $x \sim y$, dass das Paar (x, y) zu R gehört.

Aufgabe 3.9. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ lebe eine Kolonie von Flöhen, und jeder Flohsprung geht fünf Einheiten weit (in beide Richtungen). Wie viele Flohpopulationen gibt es? Wie kann man einfach charakterisieren, ob zwei Flöhe zur gleichen Population gehören oder nicht?

Aufgabe 3.10. Zeige, dass die Beziehung

$$\alpha \sim \beta, \text{ falls } (\alpha) \leftrightarrow (\beta) \text{ allgemeingültig ist},$$

eine Äquivalenzrelation auf L^V definiert. Zeige, dass sowohl alle Tautologien als auch alle Kontradiktionen eine Äquivalenzklasse bilden. Wie viele Äquivalenzklassen besitzt diese Äquivalenzrelation, falls V n Elemente besitzt?

Aufgabe 3.11. Es sei $\sim$ die in Aufgabe 3.10 diskutierte Äquivalenzrelation auf L^V. Zeige, dass jede Äquivalenzklasse $[\alpha]$ einen Repräsentanten in disjunktiver Normalform[2] besitzt.

Aufgabe 3.12. Es sei $\sim$ die in Aufgabe 3.10 diskutierte Äquivalenzrelation auf L^V und sei Q die zugehörige Quotientenmenge. Es sei λ eine Wahrheitsbelegung auf V. Zeige, dass dies eine wohldefinierte Abbildung auf Q induziert.

Aufgabe 3.13. Es sei V eine Menge von Aussagevariablen und α eine Aussage in der zugehörigen formalen Sprache. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine Abbildung und es sei $\varphi(\alpha)$ diejenige Aussage, die entsteht, wenn man in α jede Aussagevariable p durch $\varphi(p)$ ersetzt. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Wenn α eine Tautologie ist, so ist auch $\varphi(\alpha)$ eine Tautologie.
(2) Wenn φ injektiv ist, so ist α genau dann eine Tautologie, wenn dies für $\varphi(\alpha)$ gilt.
(3) $\varphi(\alpha)$ kann eine Tautologie sein, auch wenn α keine Tautologie ist.
(4) Die Aussagen gelten ebenso, wenn man überall Tautologie durch Kontradiktion ersetzt.

Aufgabe 3.14. Interpretiere die Wahrheitstabellen zu den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ als Wertetabellen von Funktionen. Was sind die Definitions-, die Werte- und die Bildmengen dieser Funktionen?

Aufgabe 3.15. Zeige, dass die axiomatisch fixierten syntaktischen Grundtautologien allgemeingültig sind

Aufgabe 3.16. Beweise die aussagenlogische Tautologie

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta)$$

aus den aussagenlogischen Axiomen.

Aufgabe 3.17. Zeige das Assoziativgesetz für die Konjunktion, also

$$\vdash (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \rightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)\ .$$

Aufgabe 3.18. Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Ausdrücke und es seien $i_1, \ldots, i_k$ Elemente aus $\{1, \ldots, n\}$. Zeige, dass

$$\vdash \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_k}$$

gilt.

[2]Unter einer disjunktiven Normalform versteht man einen Ausdruck, der eine $\vee$-Vereingung von Ausdrücken der Form $\pm p_1 \wedge \ldots \wedge \pm p_n$ ist, wobei $\pm$ bedeutet, dass entweder die Aussagevariable direkt oder in ihrer Negation genommen wird.

Aufgabe 3.19. Es seien $p_1, \dots, p_n$ Aussagevariablen und $\beta_1, \dots, \beta_n$ Aussagen. Zeige, dass man, wenn man in einer syntaktischen Tautologie α jedes Vorkommen von p_i durch β_i ersetzt, wieder eine Tautologie erhält.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.20. (3 Punkte)

Zeige, dass in einer aussagenlogischen Tautologie (und ebenso in einer aussagenlogischen Kontradiktion) mindestens eine Aussagevariable mehrfach vorkommen muss.

Aufgabe 3.21. (2 Punkte)

Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Aussagenmenge derart, dass in keiner Aussage $\alpha \in \Gamma$ das Negationszeichen $\neg$ vorkommt. Zeige, dass dann die Wahrheitsbelegung, die jeder Aussagevariablen den Wert 1 zuweist, zu einer Interpretation I mit $\Gamma \subseteq I^{\vDash}$ führt.

Aufgabe 3.22. (2 Punkte)

Zeige, dass die Aussage

$$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \wedge (\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$$

allgemeingültig ist.

Aufgabe 3.23. (3 Punkte)

Zeige

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \wedge (\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma\,.$$

Aufgabe 3.24. (2 Punkte)

Begründe die folgende Ableitungsregel: Aus $\vdash \alpha$ und $\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$ folgt $\vdash \beta \rightarrow \gamma$.

Aufgabe 3.25. (3 Punkte)

Zeige, dass folgende rekursive Definition zur gleichen Menge an syntaktischen Tautologien führt:

Die Grundtautologien werden nur mit Aussagevariablen formuliert.

Neben dem Modus Ponens gibt es die Ersetzungsregel, d.h. wenn $\vdash \alpha$, so ist auch $\vdash \alpha'$, wobei α' ein Ausdruck ist, der ensteht, wenn man in α Aussagevariablen durch beliebige Aussagen ersetzt.

Zeige, dass ohne diese Ersetzungsregel nicht die gleiche Menge beschrieben wird.