

## Invariantentheorie

### Vorlesung 32

#### Die klassischen Gruppen über $\mathbb{C}$

Wir möchten zeigen, dass über den komplexen Zahlen die klassischen linearen Gruppen linear reduktiv sind. Dies stimmt nicht in positiver Charakteristik, so dass man dafür keinen algebraischen Beweis erwarten kann. Im Gegenteil benutzt der Beweis maßtheoretische Methoden, die wir aber nicht vollständig vorstellen können.

LEMMA 32.1. *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei  $G$  eine affin-algebraische Gruppe, die auf  $V$   $K$ -rational operiere. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Für einen Vektor  $v \in V$  und einen  $K$ -Untervektorraum  $U \subseteq V$  ist*

$$\{g \in G \mid g(v) \in U\} \subseteq G$$

*Zariski-abgeschlossen.*

- (2) *Zu einem  $K$ -Untervektorraum  $U \subseteq V$  ist*

$$H = \{g \in G \mid g(U) \subseteq U\} \subseteq G$$

*eine Zariski-abgeschlossene Untergruppe von  $G$  (also selbst eine lineare Gruppe).*

*Beweis.* (1). Die Operation

$$G \times V \longrightarrow V$$

ist nach Voraussetzung ein  $K$ -Morphismus und somit ist insbesondere zu jedem  $v \in V$  die induzierte Abbildung

$$\phi_v: G \longrightarrow V, g \longmapsto g(v),$$

ein Morphismus ( $\phi_v$  ist die Hintereinanderschaltung von  $G \rightarrow G \times V, g \mapsto (g, v)$ , mit der Operationsabbildung). Da  $U \subseteq V$  Zariski-abgeschlossen ist, ist auch das Urbild  $\phi_v^{-1}(U)$  abgeschlossen. (2). Offenbar ist  $H$  eine Untergruppe von  $G$ . Es sei  $v_1, \dots, v_r$  eine Basis von  $U$ . Die Bedingung  $g(U) \subseteq U$  ist äquivalent zu  $g(v_i) \in U$  für  $i = 1, \dots, r$ . Daher ist  $H$  der Durchschnitt von endlich vielen (nach (1)) Zariski-abgeschlossenen Mengen und somit selbst abgeschlossen.  $\square$

Wir möchten zeigen, dass die linearen Gruppen  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  und  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$  über den komplexen Zahlen linear reduktiv sind. Dazu brauchen wir einige analytische Hilfsmittel (die Aussage gilt nicht in positiver Charakteristik), und

zwar die Existenz des *Haarschen Maßes*. Dazu zitieren wir den folgenden maßtheoretischen Satz.

**SATZ 32.2.** *Auf einer kompakten topologischen Gruppe  $G$  existiert ein Maß  $\mu$  (auf der  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen) mit den beiden folgenden Eigenschaften.*

- (1)  $\mu(T) = \mu(g(T))$  für jede messbare Menge  $T \subseteq G$ .
- (2) Es ist  $\mu(G) = 1$ .

*Das Maß ist durch diese beiden Eigenschaften eindeutig bestimmt.*

Diese Eigenschaften heißen *Translationsinvarianz* und *Normierung*. Das Maß, das gemäß diesem Satz in einer kompakten Gruppe existiert, heißt *Haarsches Maß*.

**BEISPIEL 32.3.** Auf der 1-Sphäre  $S^1$  lässt sich das Haarsche Maß einfach direkt definieren. Für einen Kreisbogen  $A \subseteq S^1$  zu einem Winkel  $\alpha$  im Bogenmaß muss natürlich  $\mu(A) = \alpha/2\pi$  sein. Das Haarsche Maß ist also das  $1/2\pi$ -fache des Bogenmaßes. Dieser Ansatz liefert nicht nur ein Maß für zusammenhängende Teilbögen, sondern für jede Borelmenge, indem man von der messbaren Bijektion

$$\varphi: [0, 2\pi] \longrightarrow S^1, t \longmapsto (\cos t, \sin t),$$

ausgeht und für eine Borelmenge  $B \subseteq S^1$  das Haarsche Maß durch

$$\mu(B) = \frac{\lambda(\varphi^{-1}(B))}{2\pi}$$

definiert, wobei  $\lambda$  das eindimensionale Borel-Lebesgue-Maß bezeichnet.

Die Existenz des Haarschen Maßes bedeutet insbesondere, dass über  $G$  eine sinnvolle Integrationstheorie möglich ist. D.h. für stetige Funktionen

$$f: G \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist das Integral

$$\int_G f d\mu$$

definiert. Die Translationsinvarianz führt zu

$$\int_G f d\mu = \int_G f \lambda_h d\mu = \int_G f \rho_h d\mu$$

für jedes Gruppenelement  $h \in G$ , aufgefasst als Links- oder als Rechtsmultiplikation  $\lambda_h, \rho_h: G \rightarrow G$ . Mit der Existenz des Haarschen Maßes kann man auch stetige Abbildungen von  $G$  in einen endlichdimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum integrieren.

**SATZ 32.4.** *Es sei  $G$  eine kompakte Gruppe und*

$$\rho: G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

*eine stetige Darstellung auf dem endlichdimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$ . Dann gibt es eine direkte Zerlegung von  $V$  in irreduzible Darstellungen.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass ein  $G$ -Untervektorraum  $U \subseteq V$  ein  $G$ -Komplement besitzt, daraus folgt die Aussage wie Satz 30.7 aus Lemma 30.6. Auch der Beweis ist analog zu Satz 30.7. Es sei

$$\pi: V \longrightarrow U$$

eine lineare Projektion von  $V$  auf  $U$ . Zu  $v \in V$  ist die Abbildung

$$G \longrightarrow V, g \longmapsto g(\pi(g^{-1}(v))),$$

stetig. Wir definieren

$$\psi(v) = \int_G g(\pi(g^{-1}(v)))d\mu.$$

Aufgrund der Linearität von  $g$  und der Linearität des Integrals ist  $\psi$  eine lineare Abbildung, deren Bild in  $U$  liegt, da dies für  $\pi$  gilt und da  $U$   $G$ -invariant ist. Für  $u \in U$  ist

$$\psi(u) = \int_G g(\pi(g^{-1}(u)))d\mu = \int_G g(g^{-1}(u))d\mu = \int_G ud\mu = u.$$

Also ist  $\psi$  ebenfalls eine lineare Projektion von  $V$  auf  $U$ . Für beliebige  $h \in G$  und  $v \in V$  ist aufgrund der Translationsinvarianz

$$\begin{aligned} \psi(hv) &= \int_G g(\pi(g^{-1}(hv)))d\mu \\ &= \int_G (hg)(\pi((hg)^{-1}(hv)))d\mu \\ &= \int_G h(g(\pi(g^{-1}(v))))d\mu \\ &= h\left(\int_G g(\pi(g^{-1}(v)))d\mu\right) \\ &= h\psi(v), \end{aligned}$$

so dass  $\psi$  mit der Gruppenoperation verträglich ist. Also ist kern  $\psi$  nach Lemma 30.5 ein  $G$ -invarianter Untervektorraum und somit ein  $G$ -Komplement von  $U$ .  $\square$

Der Satz von Maschke ist ein Spezialfall des vorstehenden Satzes, da man eine endliche Gruppe mit der diskreten Topologie versehen und zu einer kompakten Gruppe machen kann. Das Haarsche Maß ist dabei einfach das normierte Zählmaß.

**LEMMA 32.5.** *Es sei  $G$  eine affin-algebraische Gruppe über  $\mathbb{C}$  derart, dass es eine kompakte Untergruppe  $K \subseteq G$  gibt, deren Zariski-Abschluss gleich  $G$  ist. Dann ist  $G$  linear reduktiv.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass es zu jeder  $\mathbb{C}$ -rationalen Darstellung

$$\rho: G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

auf einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  und einem  $G$ -Untervektorraum  $U \subseteq V$  ein  $G$ -Komplement gibt. Die induzierte Darstellung

$$\rho: K \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

ist stetig. Daher gibt es nach Satz 32.4 ein  $K$ -Komplement  $W \subseteq V$ . Wir betrachten

$$H := \{g \in G \mid g(W) = W\} .$$

Dies ist eine Untergruppe von  $G$ , die  $K$  umfasst. Nach Lemma 32.1 ist  $H$  Zariski-abgeschlossen und daher gleich  $G$ .  $\square$

Die linearen Gruppen

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{O}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SO}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$$

nennt man auch die *klassischen Gruppen*.

DEFINITION 32.6. Es sei  $K$  ein Körper und  $E_n$  die Einheitsmatrix der Länge  $n$ . Eine Matrix  $M \in \mathrm{GL}_n(K)$  mit

$$M^{\mathrm{tr}} M = E_n$$

heißt *orthogonale Matrix*. Die Menge aller orthogonalen Matrizen heißt *orthogonale Gruppe*, sie wird mit

$$\mathrm{O}_n(K) = \{M \in \mathrm{GL}_n(K) \mid M^{\mathrm{tr}} M = E_n\}$$

bezeichnet.

Man beachte, dass dies bei  $K = \mathbb{C}$  nicht die unitäre Gruppe ist. Die Gruppe, die aus allen speziellen orthogonalen Matrizen besteht, also die Determinante 1 besitzen, heißt *spezielle orthogonale Gruppe*.

DEFINITION 32.7. Es sei  $K$  ein Körper und  $I_m = \begin{pmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2m}(K)$ , wobei  $E_m$  die Einheitsmatrix der Länge  $m$  ist. Eine Matrix  $S \in \mathrm{GL}_{2m}(K)$  mit

$$S^{\mathrm{tr}} I_m S = I_m$$

heißt *symplektische Matrix*. Die Menge aller symplektischen Matrizen heißt *symplektische Gruppe*, sie wird mit

$$\mathrm{Sp}_{2m}(K) = \{S \in \mathrm{GL}_{2m}(K) \mid S^{\mathrm{tr}} I_m S = I_m\}$$

bezeichnet.

Da die definierenden Bedingungen dieser Gruppen ein System aus algebraischen Gleichungen bilden, sind diese Gruppen affin-algebraisch, es handelt sich also um lineare Gruppen.

SATZ 32.8. *Die klassischen Gruppen*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{O}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SO}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$$

besitzen Zariski-dichte kompakte Untergruppen.

*Beweis.* Wir skizzieren einen Beweis für die allgemeine lineare Gruppe  $GL_n(\mathbb{C})$ . Sie enthält die unitäre Gruppe  $U_n(\mathbb{C})$  als Untergruppe, die nach Aufgabe 32.2 kompakt ist. Für  $n = 1$  ist beispielsweise  $GL_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times$  und  $U_1(\mathbb{C}) \cong S^1$ , die  $S^1$  ist eine kompakte Gruppe, deren Zariski-Abschluss ganz  $\mathbb{C}^\times$  ist, da ein Polynom, das auf  $S^1$  verschwindet, das Nullpolynom sein muss. Bei größerem  $n$  ist die Argumentation deutlich komplizierter.

Wir benutzen die Exponentialabbildung für Matrizen, also die Abbildung

$$\exp : \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}),$$

$$A \longmapsto \exp A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = E_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots$$

Dabei bedeutet  $A^n$  die  $n$ -te Potenz der Matrix bezüglich der Matrizenmultiplikation. Man kann zeigen, dass die definierende Reihe gegen eine invertierbare Matrix konvergiert, so dass die Abbildung wohldefiniert ist und dass sie analytisch ist, also in jeder Koordinaten durch eine Potenzreihe in  $n^2$  vielen komplexen Variablen gegeben ist. Insbesondere ist die Abbildung komplex-differenzierbar. Ferner ist die Exponentialabbildung surjektiv.

Wir betrachten nun den Untervektorraum der schiefhermiteschen Matrizen, das sind diejenigen Matrizen  $A = (w_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$  mit  $w_{kj} = -\overline{w_{jk}}$ . Das sind diejenigen Matrizen, die für beliebige Vektoren  $x, y \in \mathbb{C}^n$  die Bedingung

$$\langle Ax, y \rangle = -\langle x, Ay \rangle$$

für das Standardskalarprodukt erfüllen. Wir behaupten, dass die schiefhermiteschen Matrizen unter der Exponentialabbildung auf unitäre Matrizen abgebildet werden. Sei also  $A$  eine schiefhermitesche Matrix. Aufgrund der eben formulierten Eigenschaft gilt für eine beliebige quadratische Matrix  $B$  und Vektoren  $u, v \in \mathbb{C}^n$  die Gleichheit

$$\langle ABu, Bv \rangle = -\langle Bu, ABv \rangle.$$

Für  $B = \exp(tA)$  mit einem beliebigen (reellen oder komplexen Parameter)  $t$  ergibt dies

$$\langle A \exp(tA)u, \exp(tA)v \rangle + \langle \exp(tA)u, A \exp(tA)v \rangle = 0.$$

Dieser Ausdruck ist aber die Ableitung der Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto \langle \exp(tA)u, \exp(tA)v \rangle,$$

was man sieht, wenn man diese Abbildung als Hintereinanderschaltung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$t \longmapsto \exp(tA), C \longmapsto (Cu, Cv), \text{ und } (w, z) \longmapsto \langle w, z \rangle$$

schreibt. Daher ist  $\langle \exp(tA)u, \exp(tA)v \rangle$  unabhängig von  $t$  und somit gleich  $\langle u, v \rangle$ , da dies der Wert für  $t = 0$  ist. Also ist  $\exp(tA)$  eine Isometrie für jedes  $t$  und insbesondere ist  $\exp(A)$  eine Isometrie, also eine unitäre Matrix.

Wir müssen jetzt zeigen, dass der Zariski-Abschluss der unitären Gruppe gleich der allgemeinen linearen Gruppe ist. Dazu sei  $f \in \mathbb{C}[X_{ij}]$  ein Polynom in  $n^2$  Variablen, das auf der unitären Gruppe verschwindet. Es ist  $f = 0$  zu zeigen. Wir betrachten die Verknüpfung  $g = f \circ \exp$ , die eine holomorphe Funktion auf  $\text{Mat}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$  ist. Wegen der erwähnten Surjektivität der Exponentialfunktion genügt es zu zeigen, dass  $g = 0$  ist. Nach der Vorüberlegung verschwindet  $g$  auf dem reellen Untervektorraum der schiefhermiteschen Matrizen. Daher verschwindet auch die Ableitung  $g'(P)$  auf diesem Untervektorraum für jeden Punkt  $P$ . Wir betrachten daher zuerst den Fall einer komplexen Linearform  $L$  auf  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ , die auf den schiefhermiteschen Matrizen verschwindet. Wir ersetzen die Variablen  $W_{ij}$  von  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  durch  $W_{jj}, W_{jk} - W_{kj}, W_{jk} + W_{kj}$  ( $j \neq k$ ). Die Bedingung schiefhermitesch bedeutet in diesen Variablen, dass die Imaginärteile von  $W_{jk} - W_{kj}$  und dass die Realteile von  $W_{jj}, W_{jk} + W_{kj}$  gleich 0 sind. Der Kern von  $L$  enthält also zu jedem Element  $u$  der transformierten Basis eine volle reelle Gerade  $\mathbb{R}u$  und damit muss überhaupt  $u$  zum Kern gehören, d.h.  $L = 0$ . Dies bedeutet wiederum, dass  $g'(P) = 0$  und daher ist  $g$  konstant, also  $g = 0$ .  $\square$

**SATZ 32.9.** *Die klassischen Gruppen*

$$\text{GL}_n(\mathbb{C}), \text{SL}_n(\mathbb{C}), \text{O}_n(\mathbb{C}), \text{SO}_n(\mathbb{C}), \text{Sp}_n(\mathbb{C})$$

*sind linear reduktiv.*

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 32.8 und aus Lemma 32.5.  $\square$