

## Einführung in die mathematische Logik

### Arbeitsblatt 6

#### Übungsaufgaben

AUFGABE 6.1. Entwerfe einen Termstammbaum für den Term

$$f\alpha\alpha g x \alpha c_2 f \beta g y \alpha c_1 g f z \beta g c_1 f c_1$$

wie in Beispiel 6.3.

AUFGABE 6.2. Wir betrachten die arithmetische Grundtermmenge, die aus den Konstanten 0 und 1, den Variablen  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dem einstelligen Funktionssymbol  $N$  und den beiden zweistelligen Funktionssymbolen  $\alpha$  und  $\mu$  besteht. Entscheide, ob die folgenden Wörter über diesem Termalphabet Terme sind oder nicht.

- (1)  $NNNNNNN01$ ,
- (2)  $NNNNNNx_1NNNNNNNNNNNNx_2$ ,
- (3)  $\alpha NNNNNN0NNNNNNNNNNNN1$ ,
- (4)  $NNN\mu NNN\mu 0NNNNNNNNNNNN1$ ,
- (5)  $\mu\alpha\mu\alpha\mu\alpha 0101010$ ,
- (6)  $\alpha\alpha\alpha Nx_1Nx_2x_3x_4x_3$ .

Schreibe diejenigen Wörter, die Terme sind, mit Klammern,  $\iota$ ,  $+$  und  $\cdot$ .

AUFGABE 6.3. Erläutere den Unterschied zwischen  $G = (V, K, F_n, n \in \mathbb{N}_+)$  und  $A = V \cup K \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} F_n$  in Definition 6.2.

AUFGABE 6.4. Es sei  $G$  eine Grundtermmenge und  $t \in T(G)$  ein  $G$ -Term. Es sei  $u$  das am weitesten links stehende Symbol von  $t$  und  $v$  das am weitesten rechts stehende Symbol von  $t$ . Zeige die folgenden Eigenschaften.

- (1) Wenn  $u$  eine Variable oder eine Konstante ist, so ist  $t = u$ .
- (2)  $v$  ist eine Variable oder eine Konstante.
- (3) Wenn  $t_1$  und  $t_2$  Terme sind, so ist  $t_1 t_2$  kein Term.

AUFGABE 6.5. Es sei  $G$  eine Grundtermmenge und  $t$  ein  $G$ -Term. Es sei  $n$  die Gesamtzahl der Variablen und Konstanten in  $t$ , wobei mehrfaches Vorkommen auch mehrfach gezählt wird. Es sei  $k$  die Summe über alle Stelligkeiten der in  $t$  vorkommenden Funktionssymbole, wobei wiederum mehrfach auftretende Symbole auch mehrfach gezählt werden.

- (1) Bestimme  $n$  und  $k$  im Term

$$ggxyhfxfzgyfy,$$

wobei  $f$  einstellig,  $g$  zweistellig und  $h$  dreistellig sei.

- (2) Es sei  $t$  weder eine Variable noch eine Konstante. Zeige  $k \geq n$ .  
 (3) Zeige, dass die Differenz  $n - k$  beliebig groß sein kann.

AUFGABE 6.6. Für  $A, B, C$  in der Ebene bedeute  $R(A, B, C)$  die Rechtwinkligkeit des durch  $A, B, C$  gegebenen Dreiecks an der Ecke  $A$  und  $S(A, B, C)$  die pythagoreische Längenbeziehung. Betrachte die beiden formalen Aussagen

$$\forall A \forall B \forall C (R(A, B, C) \longrightarrow S(A, B, C))$$

und

$$\forall A \forall B \forall C R(A, B, C) \longrightarrow \forall A \forall B \forall C S(A, B, C).$$

Welche ist (sind) eine Formalisierung des Satzes von Pythagoras, welche ist (sind) wahr?

AUFGABE 6.7. Es sei  $T$  die Termmenge zum Symbolalphabet  $S = \{0, 1, +, \cdot\}$ . und zur Variablenmenge  $x_i, i \in I$ . Definiere eine natürliche Abbildung von  $T$  in den Polynomring  $\mathbb{Z}[x_i : i \in I]$ . Ist diese Abbildung injektiv? Ist sie surjektiv? Was ist das Bild?

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 6.8. (2 Punkte)

Eine Grundtermmenge sei durch die Variablenmenge  $V = \{x, y, z\}$ , eine Konstantenmenge  $K = \{c_1, c_2\}$ , die einstelligen Funktionssymbole  $F_1 = \{f, g\}$  und die zweistelligen Funktionssymbole  $F_2 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  gegeben. Entwerfe einen Termstammbaum für den Term

$$gf\beta\beta\alpha fxy\gamma c_1 zggc_2.$$

AUFGABE 6.9. (5 Punkte)

Zeige, dass es kein gleichseitiges Dreieck gibt, dessen sämtliche Ecken rationale Koordinaten besitzen.

Tipp: Verwende, dass  $\sqrt{3}$  irrational ist und den Satz des Pythagoras.

AUFGABE 6.10. (2 Punkte)

Beweise das Lemma von Zorn für eine total geordnete Menge.