Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 21

Ableitung von Potenzreihen

Viele wichtige Funktionen wie die Exponentialfunktion oder die trigonometrischen Funktionen werden durch eine Potenzreihe dargestellt. Der folgende Satz zeigt, dass diese Funktionen differenzierbar sind und ihre Ableitung durch diejenige Potenzreihe dargestellt wird, die sich durch gliedweises Ableiten ergibt.

Satz 21.1. *Es sei*

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenzreihe, die auf dem offenen Intervall $]-r, r[$ *konvergiere und dort die Funktion* $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ *darstellt. Dann ist auch die formal abgeleitete Potenzreihe*

$$\tilde{g}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

auf $]-r, r[$ *konvergent. Die Funktion* f *ist in jedem Punkt dieses Intervalls differenzierbar mit*

$$f'(x) = \tilde{g}(x)\,.$$

Beweis. Der Beweis erfordert ein genaues Studium von Potenzreihen. $\square$

Satz 21.2. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \exp x,$$

ist differenzierbar mit

$$\exp{}'(x) = \exp x\,.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 21.1 ist

$$\begin{aligned} \exp{}'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \exp x. \end{aligned}$$

□

KOROLLAR 21.3. *Die Ableitung des natürlichen Logarithmus*

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \ln x,$$

ist

$$\ln' : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 21.3. □

KOROLLAR 21.4. *Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion*

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto x^{\alpha},$$

differenzierbar und ihre Ableitung ist

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\,.$$

Beweis. Nach Definition ist

$$x^{\alpha} = \exp(\alpha \ \ln x)\,.$$

Die Ableitung nach x ist aufgrund von Satz 21.2 und Korollar 21.3 gleich

$$(x^{\alpha})' = (\exp(\alpha \ \ln x))' = \frac{\alpha}{x} \cdot \exp(\alpha \ \ln x) = \frac{\alpha}{x} x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

□

SATZ 21.5. *Die Sinusfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin x\,,$$

ist differenzierbar mit

$$\sin'(x) = \cos x$$

und die Kosinusfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \cos x\,,$$

ist differenzierbar mit

$$\cos'(x) = -\sin x\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 21.4. □

Die Zahl π

Die Zahl π ist der Flächeninhalt bzw. der halbe Kreisumfang eines Kreises mit Radius 1. Um darauf eine präzise Definition dieser Zahl aufzubauen müsste man zuerst die Maßtheorie (bzw. die Länge von „krummen Kurven") entwickeln. Auch die trigonometrischen Funktionen haben eine intuitive Interpretation am Einheitskreis, doch auch diese setzt das Konzept der Bogenlänge voraus. Ein alternativer Zugang ist es, die Zahl π über analytische Eigenschaften der durch ihre Potenzreihen definierten Funktionen Sinus und Kosinus zu definieren und dann erst nach und nach die Beziehung zum Kreis herzustellen.

Lemma 21.6. *Die Kosinusfunktion besitzt im reellen Intervall* $[0, 2]$ *genau eine Nullstelle.*

Beweis. Wir betrachten die Kosinusreihe

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} .$$

Für $x = 0$ ist $\cos 0 = 1$. Für $x = 2$ kann man geschickt klammern und erhält

$$\begin{aligned} \cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \ldots \\ &= 1 - \frac{2^2}{2!}(1 - \frac{4}{3 \cdot 4}) - \frac{2^6}{6!}(1 - \frac{4}{7 \cdot 8}) - \ldots \\ &= 1 - 2(2/3) - \ldots \\ &\leq -1/3. \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also mindestens eine Nullstelle im angegebenen Intervall. Zum Beweis der Eindeutigkeit betrachten wir die Ableitung des Kosinus, diese ist nach Satz 21.5

$$\cos' x = -\sin x .$$

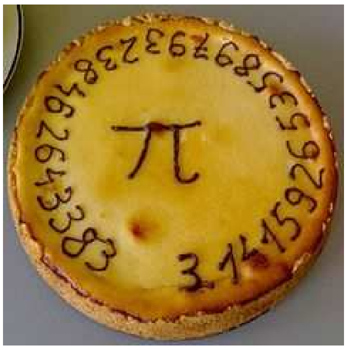
Es genügt zu zeigen, dass der Sinus im Intervall $]0, 2[$ positiv ist, denn dann ist das Negative davon stets negativ und der Kosinus ist dann nach Satz 20.7 im angegebenen Intervall streng fallend, so dass es nur eine Nullstelle gibt. Für $x \in]0, 2]$ gilt

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\ &= x(1 - \frac{x^2}{3!}) + \frac{x^5}{5!}(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}) + \ldots \\ &\geq x(1 - \frac{4}{3!}) + \frac{x^5}{5!}(1 - \frac{4}{6 \cdot 7}) + \ldots \\ &\geq x/3 \\ &> 0. \end{aligned}$$

$\square$

Definition 21.7. Es sei r die eindeutig bestimmte reelle Nullstelle der Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0, 2]$. Die *Kreiszahl* π ist definiert durch

$$\pi := 2r\,.$$



Eine rationale Approximation der Zahl π auf einem π-Pie.

Satz 21.8. *Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion erfüllen in* $\mathbb{R}$ *folgende* Periodizitätseigenschaften*.*

(1) *Es ist* $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ *und* $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*.*
(2) *Es ist* $\cos(x + \pi) = -\cos x$ *und* $\sin(x + \pi) = -\sin x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*.*
(3) *Es ist* $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$ *und* $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*.*
(4) *Es ist* $\cos 0 = 1$*,* $\cos \pi/2 = 0$*,* $\cos \pi = -1$*,* $\cos 3\pi/2 = 0$ *und* $\cos 2\pi = 1$*.*
(5) *Es ist* $\sin 0 = 0$*,* $\sin \pi/2 = 1$*,* $\sin \pi = 0$*,* $\sin 3\pi/2 = -1$ *und* $\sin 2\pi = 0$*.*

Beweis. Aufgrund der Kreisgleichung

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

ist $(\sin \frac{\pi}{2})^2 = 1$, also ist $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ wegen der Überlegung im Beweis zu Lemma 21.6. Daraus folgen mit den Additionstheoremen die in (3) angegebenen Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus. Es genügt daher, die Aussagen für den Kosinus zu beweisen. Alle Aussagen folgen dann aus der Definition von π und aus (3). $\square$

Die inversen trigonometrischen Funktionen

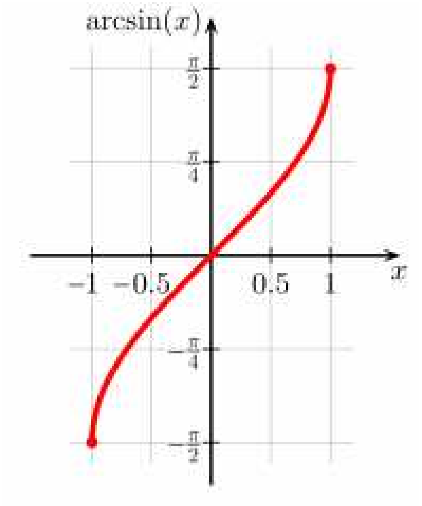
Korollar 21.9. *Die reelle Sinusfunktion induziert eine bijektive, streng wachsende Funktion*

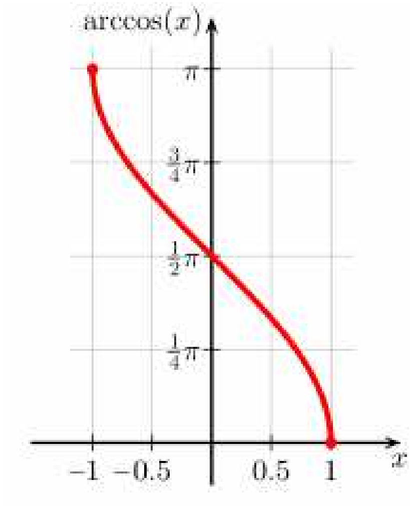
$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1],$$

und die reelle Kosinusfunktion induziert eine bijektive streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1].$$

Beweis. Siehe Aufgabe 21.12. □





Aufgrund der Bijektivität von Sinus und Kosinus auf geeigneten Intervallen gibt es die folgenden Umkehrfunktionen.

Definition 21.10. Die Umkehrfunktion der reellen Sinusfunktion ist

$$[-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ x \longmapsto \arcsin x\,,$$

und heißt *Arcus-Sinus*.

Definition 21.11. Die Umkehrfunktion der reellen Kosinusfunktion ist

$$[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi],\ x \longmapsto \arccos x\,,$$

und heißt *Arcus-Kosinus*.

Die Taylor-Formel

Zu einer konvergenten Potenzreihe[1]

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

[1]Bisher haben wir nur Potenzreihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ betrachtet; die Variable x darf jetzt auch durch die „verschobene Variable“ $x - a$ ersetzt werden, um das lokale Verhalten im Entwicklungspunkt a beschreiben zu können.

bilden die Teilpolynome $\sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$ polynomiale Approximationen für die Funktion f im Punkt a. Ferner ist f in a beliebig oft differenzierbar und die Ableitungen lassen sich aus der Potenzreihe ablesen. Wir fragen uns nun umgekehrt, inwiefern man aus den höheren Ableitungen einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion approximierende Polynome (oder eine Potenzreihe) erhalten kann. Dies ist der Inhalt der *Taylor-Entwicklung*.

Brook Taylor (1685-1731)

Definition 21.12. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall,

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine n-mal differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt

$$T_{a,n}(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

das *Taylor-Polynom vom Grad*[2] n zu f im Entwicklungspunkt a.

Das Taylor-Polynom zum Grad n ist dasjenige (eindeutig bestimmte) Polynom vom Grad $\leq n$, das mit f an der Stelle a bis zur n-ten Ableitung übereinstimmt.

Satz 21.13. *Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion, und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in I$ ein $c \in I$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Dabei kann c zwischen a und x gewählt werden.

[2]Oder genauer das Taylor-Polynom vom Grad $\leq n$. Wenn die n-te Ableitung in a null ist, so besitzt das n-te Taylor-Polynom einen Grad kleiner als n.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Korollar 21.14. *Es sei I ein beschränktes abgeschlossenes Intervall,*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $a \in I$ ein innerer Punkt und $B := \max(|f^{(n+1)}(c)|, c \in I)$. Dann gilt zwischen $f(x)$ und dem n-ten Taylor-Polynom die Fehlerabschätzung

$$| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k | \leq \frac{B}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} .$$

Beweis. Die Zahl B existiert aufgrund von Satz 16.10, da nach Voraussetzung die $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)}$ stetig auf dem kompakten Intervall I ist. Die Aussage folgt somit direkt aus Satz 21.13. □

Abbildungsverzeichnis