Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 3

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1.*

Bestimme, welche der beiden rationalen Zahlen p und q größer ist:

$$p = \frac{573}{-1234} \text{ und } q = \frac{-2007}{4322}\,.$$

Aufgabe 3.2.*

Zwei Fahrradfahrer, A und B, fahren auf ihren Fahrrädern eine Straße entlang. Fahrer A macht pro Minute 40 Pedalumdrehungen, hat eine Übersetzung von Pedal zu Hinterrad von 1 zu 6 und Reifen mit einem Radius von 39 Zentimetern. Fahrer B braucht für eine Pedaldrehung 2 Sekunden, hat eine Übersetzung von 1 zu 7 und Reifen mit einem Radius von 45 Zentimetern.

Wer fährt schneller?

Aufgabe 3.3.*

Zwei Personen, A und B, liegen unter einer Palme, A besitzt 2 Fladenbrote und B besitzt 3 Fladenbrote. Eine dritte Person C kommt hinzu, die kein Fladenbrot besitzt, aber 5 Taler. Die drei Personen werden sich einig, für die 5 Taler die Fladenbrote untereinander gleichmäßig aufzuteilen. Wie viele Taler gibt C an A und an B?

Aufgabe 3.4. Man gebe die Antworten als Bruch (bezogen auf das angegebene Vergleichsmaß): Um wie viel ist eine drei Viertel Stunde länger als eine halbe Stunde, und um wie viel ist eine halbe Stunde kürzer als eine drei Viertel Stunde?

Aufgabe 3.5. Man erläutere die Uhrzeitangaben „halb fünf“, „viertel fünf“, „drei viertel fünf“. Was würde „ein sechstel fünf“ und „drei siebtel fünf“ bedeuten?

Aufgabe 3.6. Zeige, und zwar allein unter Bezug auf Rechengesetze in $\mathbb{Z}$, dass die durch

(1)
$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} := \frac{ab}{cd}$$

(2)
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} := \frac{ad+bc}{cd}$$

definierte Addition und Multiplikation auf den rationalen Zahlen wohldefiniert ist, und dass die Assoziativität, die Kommutativität und das Distributivgesetz gelten.

Aufgabe 3.7. Formuliere die *binomischen Formeln* für zwei reelle Zahlen und beweise die Formeln mit Hilfe des Distributivgesetzes.

Aufgabe 3.8. Zeige, dass es in $\mathbb{Q}$ kein Element x mit $x^2 = 2$ gibt.

Aufgabe 3.9. Es sei p eine Primzahl. Zeige, unter Verwendung der eindeutigen Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen, dass die reelle Zahl $\sqrt{p}$ irrational ist.

Aufgabe 3.10. Beweise durch Induktion die folgende Formel.

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{2(i-1)}}{3^i} = \left(\frac{4}{3}\right)^n .$$

Aufgabe 3.11. Besitzen Sie eine geometrische Intuition zur Addition von zwei gegebenen Zahlen auf der reellen Zahlengeraden?

Besitzen Sie eine geometrische Intuition zur Multiplikation von zwei gegebenen Zahlen auf der reellen Zahlengeraden?

Aufgabe 3.12.*

a) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0,1[$ mit

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

b) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0,1[$ mit

$$a^2 + b^2 \neq c^2 .$$

c) Man gebe ein Beispiel für irrationale Zahlen $a, b \in]0,1[$ und eine rationale Zahl $c \in]0,1[$ mit

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Die folgende Aufgabe soll allein unter Bezug auf die Anordnungsaxiome der reellen Zahlen gezeigt werden (also ohne Bezug auf die Anschauung der Zahlengeraden).

Aufgabe 3.13. Zeige, dass für reelle Zahlen die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) $1 > 0$.
(2) Aus $a \geq b$ und $c \geq 0$ folgt $ac \geq bc$.
(3) Aus $a \geq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \leq bc$.
(4) Es ist $a^2 \geq 0$.
(5) Aus $a \geq b \geq 0$ folgt $a^n \geq b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(6) Aus $a \geq 1$ folgt $a^n \geq a^m$ für ganze Zahlen $n \geq m$.
(7) Aus $a > 0$ folgt $\frac{1}{a} > 0$.
(8) Aus $a > b > 0$ folgt $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Aufgabe 3.14.*

Zeige, dass für reelle Zahlen $x \geq 3$ die Beziehung

$$x^2 + (x+1)^2 \geq (x+2)^2$$

gilt.

Vor den nächsten beiden Aufgaben erinnern wir an die beiden folgenden Definitionen.

Zu zwei reellen Zahlen x und y heißt

$$\frac{x+y}{2}$$

das *arithmetische Mittel*.

Zu zwei nichtnegativen reellen Zahlen x und y heißt

$$\sqrt{x \cdot y}$$

das *geometrische Mittel*.

Aufgabe 3.15. Es seien $x < y$ reelle Zahlen. Zeige, dass für das arithmetische Mittel $\frac{x+y}{2}$ die Beziehung

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

gilt.

Aufgabe 3.16. Es seien x und y zwei nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass das arithmetische Mittel der beiden Zahlen mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel ist.

Aufgabe 3.17. Es sei

$$n = dq + r$$

das Ergebnis einer Division mit Rest. Zeige, dass

$$q = \lfloor \frac{n}{d} \rfloor$$

ist.

Aufgabe 3.18. Beweise die folgenden Eigenschaften für die Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|\,,$$

(dabei seien x, y beliebige reelle Zahlen).

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
(3) $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist.
(4) $|y - x| = |x - y|$.
(5) $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) Für $x \neq 0$ ist $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) Es ist $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).

Aufgabe 3.19.*

Beweise die *Bernoulli-Ungleichung*, das ist die Aussage, dass für reelle Zahlen $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

gilt.

Aufgabe 3.20. Sei x eine reelle Zahl, $x \neq 1$. Beweise für $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\,.$$

Aufgabe 3.21. Es sei $p \neq 2, 5$ eine Primzahl. Zeige, dass es eine natürliche Zahl der Form (im Dezimalsystem)

$$111 \ldots 111$$

gibt, die ein Vielfaches von p ist.

Tipp: Verwende Aufgabe 2.10 mit $a = 10$ und $p = d$ und die vorstehende Aufgabe

Aufgabe 3.22. Es seien $x_1, \ldots, x_n$ reelle Zahlen. Zeige durch Induktion die Abschätzung

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ .$$

Aufgabe 3.23. Es seien drei Punkte $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ gegeben. Zeige, dass der Flächeninhalt des durch diese drei Punkte bestimmten Dreiecks eine rationale Zahl ist.

Aufgabe 3.24. Zeige, dass es kein gleichseitiges Dreieck gibt, dessen sämtliche Ecken rationale Koordinaten besitzen.