

## Invariantentheorie

### Vorlesung 25

#### Zur Berechnung der Invariantenringe

Wir möchten nun die Invariantenringe zu den zuvor klassifizierten Untergruppen der speziellen linearen Gruppe in der Dimension zwei berechnen. Eine typische Besonderheit der speziellen Quotientensingularitäten in der Dimension zwei ist, dass sie sich mit einer einzigen Gleichung beschreiben lassen. Diese Gleichungen wollen wir im Folgenden bestimmen.

**SATZ 25.1.** *Es sei  $G \subseteq \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$  eine endliche Untergruppe mit ihrer natürlichen Operation auf dem Polynomring  $\mathbb{C}[U, V]$ . Es sei  $H = \pi(G)$  die zugehörige Untergruppe von  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  und es sei  $K$  eine Bahn zur Operation von  $H$  auf der Sphäre  $S^2$ , die wir auch mit der komplex-projektiven Geraden  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  und der Menge der eindimensionalen Untervektorräume in  $\mathbb{C}^2$  identifizieren. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) Zur Klasse  $K$  mit den darin enthaltenen Punkten (in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ )

$$(a_1 : b_1), (a_2 : b_2), \dots, (a_r : b_r)$$

ist das Polynom

$$F := \prod_{j=1}^r (b_j U - a_j V)$$

$G$ -semiinvariant.

- (2) Insbesondere ist zu einer Halbachsenklasse

$$K = (a_1 : b_1), (a_2 : b_2), \dots, (a_r : b_r)$$

das Polynom

$$F := \prod_{j=1}^r (b_j U - a_j V)$$

$G$ -semiinvariant.

- (3) Wenn  $F \in \mathbb{C}[U, V]$  ein homogenes,  $G$ -semiinvariantes Polynom mit der Faktorzerlegung

$$F = \prod_{j=1}^s (d_j U - c_j V)$$

ist, und wenn  $(c : d)$  einer dieser (Nullstellen)-Punkte ist, so ist auch  $h(c : d)$  für  $h \in H$  ein solcher Punkt.

*Beweis.* (1). Für  $\sigma \in G$  ist

$$\begin{aligned} F\sigma &= \left( \prod_{j=1}^r (b_j U - a_j V) \right) \sigma \\ &= \prod_{j=1}^r ((b_j U - a_j V) \sigma). \end{aligned}$$

Wir wissen, dass  $\sigma \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}$  projektiv betrachtet gleich einem der Punkte, sagen wir gleich  $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$ , ist. Dies bedeutet, dass  $\sigma \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$  den gleichen eindimensionalen Untervektorraum von  $\mathbb{C}^2$  definieren, und daher ist

$$\sigma \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = \xi_j \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$$

mit einem gewissen  $\xi_j \in \mathbb{C}^\times$ . Da dies für jedes  $j$  gilt, und da die Wirkung von  $\sigma$  auf der zugrunde liegenden Punktmenge  $K$  bijektiv ist, also in  $F\sigma$  die (bis auf Streckung) gleichen Linearfaktoren wie in  $F$  vorkommen, gilt

$$F\sigma = \zeta F$$

mit einem  $\zeta = \prod_{j=1}^r \xi_j \in \mathbb{C}^\times$ . Wir betrachten die Zuordnung

$$G \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \sigma \longmapsto \frac{F\sigma}{F}.$$

Dies ist ein Charakter, wie man sieht, wenn man das Verhalten der einzelnen Faktoren betrachtet. Daher ist  $F$  eine Semiinvariante. (2) ist ein Spezialfall von (1). (3). Da  $F$  semiinvariant ist, ist insbesondere sein Nullstellengebilde, also die Vereinigung der Geraden zu den beteiligten Linearformen, invariant. Das Bild einer solchen Geraden unter  $\sigma \in G$  muss also eine der Geraden sein. Die Gleichheit von Geraden bedeutet aber, dass ihre zugehörigen Punkte auf der projektiven Gerade übereinstimmen.  $\square$

Die (Semi)-Invarianten zu den Halbachsenklassen sind besonders wichtig, da sie einen vergleichsweise kleinen Grad besitzen und häufig ein Algebraerzeugendensystem des Invariantenringes bilden.

**BEMERKUNG 25.2.** Satz 25.3 liefert die Grundlage zur Bestimmung der Invariantenringe unter den natürlichen Operationen der endlichen Untergruppen der  $SU_2(\mathbb{C})$ . Insbesondere erlaubt dieser Satz folgende Strategie: Wenn  $G$  gar keine nichttrivialen Charaktere besitzt, so sind die im Satz konstruierten Semiinvarianten sogar Invarianten. Andernfalls gibt es einen nichttrivialen Charakter und damit einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{Z}/(r)$$

mit  $r \geq 2$ . Der Kern  $N = \ker \varphi$  ist eine echte Untergruppe von  $G$  und kommt ebenfalls in der Liste aus Satz 24.4 vor, besitzt aber eine kleinere

Ordnung. Da  $N$  ein Normalteiler in  $G$  ist, können wir den Invariantenring zu  $G$  aus dem Invariantenring zu  $N$  mittels Proposition 5.1 (3) ausrechnen.

### Die Invariantenringe der zyklischen und der binären Diedergruppe

Der Invariantenring zur Operation der zyklischen Gruppe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \mid \zeta^n = 1 \right\},$$

wobei  $\zeta$  eine primitive  $n$ -te Einheitswurzel bezeichnet, wurde bereits in Beispiel 7.13 bestimmt. Es ist

$$K[U^n, V^n, UV] \cong K[X, Y, Z]/(XY - Z^n).$$

Diese Ringe nennt man  $A_{n+1}$ -Singularitäten (man beachte die Indizierung)! Darauf aufbauend können wir den Invariantenring zu den binären Diedergruppen  $BD_m$  bestimmen.

BEISPIEL 25.3. Es sei  $m \in \mathbb{N}_+$  und es sei  $K$  ein Körper der Charakteristik  $\neq 2$ , der eine vierte primitive Einheitswurzel  $i$  und eine  $2m$ -te primitive Einheitswurzel  $\zeta$  enthalte. Wir betrachten die von den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe  $G$  (die man auch als  $BD_m$  bezeichnet) der  $GL_2(K)$  mit ihrer natürlichen Operation auf  $R = K[U, V]$ . Es sei  $H \subseteq G$  die von  $A$  erzeugte zyklische Untergruppe der Ordnung  $2m$ . Da  $G$  die Ordnung  $4m$  besitzt, ist  $H$  ein Normalteiler in  $G$ . Daher können wir mit Hilfe von Proposition 5.1 (3) und Beispiel 7.13 den Invariantenring  $K[U, V]^G$  ausrechnen. Es ist ja

$$S := K[U, V]^H = K[U^{2m}, V^{2m}, UV] = K[X, Y, Z]/(XY - Z^{2m}).$$

Die Operation des nichttrivialen Elementes aus  $G/H \cong \mathbb{Z}/(2)$  auf diesem Invariantenring wird durch die Operation von  $B$  auf  $K[U, V]$  repräsentiert. Sie ist also durch  $U \mapsto iV$  und  $V \mapsto iU$  gegeben und induziert

$$X = U^{2m} \mapsto i^{2m} V^{2m} = \rho Y,$$

$$Y = V^{2m} \mapsto i^{2m} U^{2m} = \rho X,$$

$$Z = UV \mapsto i^2 UV = -Z,$$

wobei  $\rho = \pm 1$  ist, je nachdem, ob  $m$  gerade oder ungerade ist.

Durch diese Operation ist  $S$   $\mathbb{Z}/(2)$ -graduiert. Bei  $m$  gerade sind

$$X + Y, Z^2, Z(X - Y)$$

invariante Polynome (bei  $m$  ungerade  $X - Y, Z^2, Z(X + Y)$ ) und  $Z$  und  $X - Y$  sind semiinvariante Polynome. Mittels  $X = \frac{1}{2}(X + Y) + \frac{1}{2}(X - Y)$  und  $Y = \frac{1}{2}(X + Y) - \frac{1}{2}(X - Y)$  lässt sich für jedes Monom  $X^i Y^j Z^k$  die homogene Zerlegung bezüglich dieser Graduierung angeben (wegen  $(X - Y)^2 = (X + Y)^2 - 4Z^{2m}$  kann diese Invariante durch die anderen ausgedrückt werden). Deshalb bilden  $L = X + Y, M = Z^2, N = Z(X - Y)$  ein Algebraerzeugendensystem des Invariantenringes

$$R^G = S^{\mathbb{Z}/(2)}.$$

Es besteht die Relation

$$\begin{aligned} N^2 &= Z^2(X - Y)^2 \\ &= M(X^2 + Y^2 - 2XY) \\ &= M(L^2 - 4XY) \\ &= ML^2 - 4MM^m \\ &= ML^2 - 4M^{m+1}. \end{aligned}$$

Da das Polynom

$$N^2 - ML^2 + 4M^{m+1}$$

irreduzibel ist, und der Invariantenring zweidimensional sein muss, ist

$$R^G \cong K[L, M, N]/(N^2 - ML^2 + 4M^{m+1}).$$

Unter schwachen Bedingungen an den Körper  $K$  ist dieser Ring isomorph zu

$$K[X, Y, Z]/(X^2 + YZ^2 + Y^{m+1}).$$

Man spricht von den  $D_{m+2}$ -Singularitäten (man beachte die Indizierung). Nach Aufgabe 25.9 ist  $D_3$  isomorph zu  $A_3$ , also

$$\mathbb{C}[X, Y, Z]/(X^2 + YZ^2 + Y^2) \cong \mathbb{C}[S, T, U]/(ST + U^4),$$

so dass man diese  $D$ -Liste bei  $D_4$  beginnen lässt. In den ursprünglichen Variablen  $U$  und  $V$  sind

$$U^{2m} + V^{2m}, U^2V^2 \text{ und } UV(U^{2m} - V^{2m})$$

ein Algebraerzeugendensystem aus invarianten Polynomen.

### Die Invarianten der binären Tetraedergruppe

BEISPIEL 25.4. Die binäre Diedergruppe  $BD_2$  ist ein Normalteiler in der binären Tetraedergruppe  $BT$ . Die Untergruppenbeziehung kann man direkt aus den expliziten Beschreibungen

$$BD_2 = \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix} \right\rangle = BT$$

(wobei  $\zeta$  eine primitive achte Einheitswurzel ist) ablesen.

BEISPIEL 25.5. Wir wollen den Invariantenring zur binären Tetraedergruppe  $BT \subseteq SL_2(\mathbb{C})$  berechnen, die auf dem Polynomring  $\mathbb{C}[U, V]$  operiert. Wir verwenden den Normalteiler  $BD_2 \subseteq BT$ . Der Invariantenring  $\mathbb{C}[U, V]^{BD_2}$  wird nach Beispiel 25.5 von

$$L = U^4 + V^4, \quad M = U^2V^2 \quad \text{und} \quad N = UV(U^4 - V^4)$$

erzeugt mit der Relation

$$N^2 - ML^2 + 4M^3 = 0.$$

Auf diesem Invariantenring wirkt die Restklassengruppe  $BT/BD_2 \cong \mathbb{Z}/(3)$ , wobei das nichttriviale Element (die 1) durch

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix}$$

repräsentiert wird. Diese Matrix schickt  $U$  auf  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta^7U + \zeta^7V)$  und  $V$  auf  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta^5U + \zeta V)$ . Daher ist

$$U^4 \mapsto -\frac{1}{4}(U^4 + 4U^3V + 6U^2V^2 + 4UV^3 + V^4)$$

und

$$V^4 \mapsto -\frac{1}{4}(-U + V)^4 = -\frac{1}{4}(U^4 - 4U^3V + 6U^2V^2 - 4UV^3 + V^4)$$

und damit

$$L = U^4 + V^4 \mapsto -\frac{1}{2}(U^4 + 6U^2V^2 + V^4) = -\frac{1}{2}L - 3M.$$

Ferner wird  $M = U^2V^2$  auf

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\zeta^7U + \zeta^7V)^2(\zeta^5U + \zeta V)^2 &= \frac{1}{4}(U + V)^2(-U + V)^2 \\ &= \frac{1}{4}(U^4 - 2U^2V^2 + V^4) \\ &= \frac{1}{4}(L - 2M) \\ &= \frac{1}{4}L - \frac{1}{2}M \end{aligned}$$

geschickt. Das Element  $N = UV(U^4 - V^4)$  wird auf

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta^7U + \zeta^7V) \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta^5U + \zeta V)(-2U^3V - 2UV^3) &= (U + V)(-U + V)(-U^3V - UV^3) \\ &= (U + V)(-U + V)(-1)UV(U^2 + V^2) \\ &= UV(U - V)(U + V)(U + iV)(U - iV) \\ &= UV(U^4 - V^4) \\ &= N, \end{aligned}$$

also auf sich selbst geschickt. Neben

$$N = UV(U^4 - V^4)$$

sind, wie man direkt nachrechnet, auch

$$P := L^2 + 12M^2 = U^8 + 14U^4V^4 + V^8$$

6

und

$$Q := L^3 - 36LM^2 = U^{12} - 33U^8V^4 - 33U^4V^8 + V^{12}$$

invariant. Wegen

$$N^4 = (ML^2 - 4M^3)^2 = M^2L^4 - 8M^4L^2 + 16M^6$$

einerseits und

$$\begin{aligned} (L^3 - 36LM^2)^2 - (L^2 + 12M^2)^3 &= -72L^4M^2 + 1296L^2M^4 - 36L^4M^2 - 432L^2M^4 - 1728M^6 \\ &= -108L^4M^2 + 864L^2M^4 - 1728M^6 \\ &= -108(M^2L^4 - 8M^4L^2 + 16M^6) \end{aligned}$$

andererseits haben wir zwischen diesen Invarianten die Relation

$$-108N^4 = (L^3 - 36LM^2)^2 - (L^2 + 12M^2)^3.$$

Mit  $P = L^2 + 12M^2$  und  $Q = L^3 - 36LM^2$  liegt also die Relation

$$Q^2 - P^3 + 108N^4 = 0$$

vor.

Wir müssen noch zeigen, dass damit alle Invarianten erfasst sind, dass also der Invariantenring von  $N, P, Q$  erzeugt wird. Dazu lassen wir uns davon leiten, dass eine Operation der  $\mathbb{Z}/(3)$  vorliegt, die von einer  $\mathbb{Z}/(3)$ -Graduierung herrühren muss. Nach Korollar 7.11 ist der Invariantenring gleich dem Ring der neutralen Stufe, der häufig einfacher zu bestimmen ist. Wie oben berechnet, wirkt der Erzeuger der Gruppe durch  $L \mapsto -\frac{1}{2}L - 3M$  und  $N \mapsto \frac{1}{4}L - \frac{1}{2}M$ . Durch Diagonalisierung dieser Matrix erhält man, dass

$$A = \sqrt{3}iL - 6M$$

und

$$B = \sqrt{3}iL + 6M$$

Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$  bzw.  $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$  sind, die dritte Einheitswurzeln sind. Wegen

$$L = \frac{1}{2\sqrt{3}i}(A + B)$$

und

$$M = \frac{1}{12}(B - A)$$

kann man die definierende Gleichung (des Invariantenringes zu  $BD_2$ ) in den Variablen  $N, A, B$  als

$$\begin{aligned} N^2 - ML^2 + 4M^3 &= N^2 - \frac{1}{12} \left( \frac{1}{2\sqrt{3}i} \right)^2 (B - A)(A + B)^2 + 4 \left( \frac{1}{12} \right)^3 (B - A)^3 \\ &= N^2 + \frac{1}{144} (B^3 + B^2A - BA^2 - A^3) + \frac{1}{432} (B^3 - 3B^2A + 3BA^2 - A^3) \\ &= N^2 + \frac{1}{108} (B^3 - A^3). \end{aligned}$$

Wir können also davon ausgehen, dass der Ring

$$K[N, A, B] / \left( N^2 + \frac{1}{108}B^3 - \frac{1}{108}A^3 \right)$$

vorliegt, der  $\mathbb{Z}/(3)$ -graduiert ist, wobei  $N$  den Grad 0,  $B$  den Grad 1 und  $A$  den Grad 2 bekommt. Die definierende Gleichung besitzt den Grad 0. Der Ring der nullten Stufe wird offenbar von  $N, A^3, B^3, AB$  erzeugt. Für die oben gefundenen invarianten Polynome gilt

$$\begin{aligned} P &= L^2 + 12M^2 \\ &= -\frac{1}{12}(A+B)^2 + \frac{1}{12}(B-A)^2 \\ &= -\frac{1}{3}AB \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Q &= L^3 - 36LM^2 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}i}(A+B) \left( -\frac{1}{12}(A+B)^2 - \frac{1}{4}(B-A)^2 \right) \\ &= \frac{1}{6\sqrt{3}i}(A+B)(-A^2 + AB - B^2) \\ &= \frac{1}{6\sqrt{3}i}(A^3 + B^3). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Relation kann man  $A^3$  (und  $B^3$ ) als Linearkombination von  $N, P, Q$  ausdrücken. Daher sind dies Algebraerzeuger des Invariantenrings und dieser ist zu

$$\mathbb{C}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^3 + Z^4)$$

isomorph. Man spricht von der  $E_6$ -Singularität.