Fachbereich Mathematik/Informatik **16. Juni 2012**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik für Anwender II

Testklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Die erzielte Punktezahl geht doppelt auf Ihr Zulassungskonto.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	4	4	8	4	5	5	5	6	6	2	3	4	64
erhaltene Pkt.:															

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Ein *Skalarprodukt* auf einem reellen Vektorraum V.
(2) Eine *stetige Abbildung* zwischen zwei metrischen Räumen M und N.
(3) Eine *differenzierbare Kurve*

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
(4) Der *Eigenraum* zu $\lambda \in K$ und einer K-linearen Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V.$$

(5) Eine *trigonalisierbare* lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ (V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum).
(6) Ein *homogenes lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*.
(7) Die *Jacobi-Matrix* zu einer partiell differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$.
(8) Das *totale Differential* in einem Punkt $P \in V$ einer in diesem Punkt total differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

(dabei seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume).

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Die Formel für die Länge einer stetig differenzierbaren Kurve

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

(2) Der Satz über die Beziehung von algebraischer und geometrischer Vielfachheit zu einer linearen Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V.
(3) Der Satz über den Zusammenhang von totaler Differenzierbarkeit und Richtungsableitung für eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$.

(4) Die *Kettenregel* zu zwei total differenzierbaren Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

und

$$g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass jede endliche Teilmenge $T \subseteq M$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 5. (8 (2+4+2) Punkte)

Wir betrachten die differenzierbare Kurve

$$f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t, \sin t).$$

a) Skizziere das Bild dieser Kurve und den Streckenzug, der sich ergibt, wenn man das Definitionsintervall in vier gleichlange Teilintervalle unterteilt.

b) Berechne die Gesamtlänge des in a) beschriebenen Streckenzugs.

c) Zeige, dass für die Länge L dieser Kurve die Abschätzung

$$L \leq \sqrt{2}\pi$$

gilt.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Es sei

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Kurve und sei

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Isometrie. Beweise die Längengleichheit

$$L(\gamma) = L(\varphi \circ \gamma).$$

Aufgabe 7. (5 Punkte)
Sei

$$\gamma : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \left(t^2, -t^2+1, t\right),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \left(y^2 - xz, xyz, 5x^2z - yz\right)\ .$$

Aufgabe 8. (5 Punkte)
Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = 3yy' + y^2 \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 2$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 9. (5 Punkte)
Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ v \longmapsto Mv.$$

Aufgabe 10. (6 (2+3+1) Punkte)
Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2+i \\ 0 & i & 1+i \\ 0 & 0 & -1+2i \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

b) Berechne zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

c) Stelle die Matrix für φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren auf.

Aufgabe 11. (6 (4+2) Punkte)

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 12. (2 Punkte)

Bestimme zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto t^2,$$

die Richtungsableitung in Richtung 3 für jeden Punkt.

Aufgabe 13. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y) \longmapsto \left(\frac{\sin x}{x^2+y^4},\ \frac{x^2 y}{x^2+y^2},\ \ln\left(x^2+y^2\right) \right)$$

in jedem Punkt.

Aufgabe 14. (4 Punkte)

Bestätige die Kettenregel für $g \circ f$ für die beiden differenzierbaren Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^3 - t, -t^2),$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xy + x + y.$$