Dipl.-Math. A. Kaid **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Ferienblatt 2

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 2.1. Bestimme eine Basis des Untervektorraums
$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\} \subset \mathbb{R}^3 .$$

Aufgabe 2.2. Sind die reellen Zahlen 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 2.3. Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und
$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x \longmapsto A \cdot x$$
die zugehörige lineare Abbildung.

(1) Bestimme jeweils eine Basis und die Dimension von $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$.
(2) Finde einen Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^3$ derart, dass
$$\mathbb{R}^3 = V \oplus \text{Kern}(f)$$
gilt.
(3) Gibt es auch einen Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^2$, $U \neq \{0\}$, mit
$$\mathbb{R}^2 = U \oplus \text{Bild}(f)\,?$$

($\oplus$ bezeichnet die direkte Summe; siehe Aufgabenblatt 18)

Aufgabe 2.4. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $C^2(I, R)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auf I. Betrachte die Abbildung
$$d : C^2(I, \mathbb{R}) \longrightarrow C^1(I, \mathbb{R}),\ f \longmapsto f'.$$

(1) Zeige, dass d eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist.
(2) Bestimme eine Basis von $\text{Kern}(d)$.

Aufgabe 2.5. Sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch $f(x, y, z) = (x + 2z, y - z, x + y, 2x + 3z)$.

(1) Bestimme die zu f korrespondierende Matrix A. Ist f injektiv?

(2) Sei $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und sei $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne $A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Aufgabe 2.6. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Berechne:

(1) die Eigenwerte von A;
(2) die zugehörigen Eigenräume;
(3) die geometrische und algebraische Vielfachheit der einzelnen Eigenwerte;
(4) eine Matrix $C \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ derart, dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2.7. Sei $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Rechne nach: $|| x + y ||^2 - || x - y ||^2 = 4\langle x, y \rangle$.

Aufgabe 2.8. Wir arbeiten auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für $i \in \mathbb{N}$ und $f \in V$ sei

$$|| f ||_i := \max\{| f(x) | : x \in [-i, i]\}.$$

Zeige, dass

$$d(f, g) := \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \frac{|| f - g ||_i}{1 + || f - g ||_i}$$

eine Metrik auf dem Raum V definiert. Zeige weiter, dass keine Norm $|| - || : V \to \mathbb{R}_+$ existiert mit $|| f - g || = d(f, g)$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.9. (4 Punkte)

Bestimme eine Basis des Untervektorraums

$$U = \{\varphi \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \varphi(x) = 0 \text{ bis auf endlich viele } x \in \mathbb{R}\} \subset \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\,.$$

Aufgabe 2.10. (3 Punkte)

Ist $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} < \infty$?

Hinweis: Verwende die Tatsache (ohne Beweis), dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist.

Aufgabe 2.11. (4 Punkte)

Sind die Funktionen $f_n(x) := \frac{1}{n+x}$, $n \in \mathbb{N}$, linear unabhängig im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\operatorname{Abb}(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R})$?

Aufgabe 2.12. (4 Punkte)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimme

(1) $\operatorname{Rang}(A)$;
(2) eine Basis und die Dimension des Lösungsraums des homogenen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$;
(3) die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

Aufgabe 2.13. (4 Punkte)

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : K^3 \longrightarrow K^2, \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Es sei $U \subseteq K^3$ der durch die lineare Gleichung $2x + 3y + 4z = 0$ definierte Untervektorraum von K^3, und ψ sei die Einschränkung von φ auf U. Zu U gehören Vektoren der Form

$$u = (0, 1, a),\ v = (1, 0, b) \text{ und } w = (1, c, 0)\,.$$

Berechne die Übergangsmatrizen zwischen den Basen

$$\mathfrak{b}_1 = v, w,\ \mathfrak{b}_2 = u, w \text{ und } \mathfrak{b}_3 = u, v$$

von U sowie die beschreibenden Matrizen für ψ bzgl. dieser drei Basen (und der Standardbasis auf K^2).

Aufgabe 2.14. (4 Punkte)

Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2.15. (3 Punkte)

Sei $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Rechne nach:

$$|| x + y ||^2 + || x - y ||^2 = 2 \, || x ||^2 + 2 \, || y ||^2 .$$

Aufgabe 2.16. (3 Punkte)

Sei $n \geq 2$. Zeige, dass für die Norm $|| x || := \max\{| x_i | : 1 \leq i \leq n\}$ auf dem $\mathbb{R}^n$ kein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ existiert mit der Eigenschaft $|| x || = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.