**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2012**

# Mathematik für Anwender II

## Arbeitsblatt 39

### Aufwärmaufgaben

AUFGABE 39.1. Bestimme die Eigenvektoren und die Eigenwerte zu einer linearen Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Der Begriff des Eigenvektors ist auch für unendlichdimensionale Vektorräume definiert und wichtig, wie die folgende Aufgabe zeigt.

AUFGABE 39.2. Es sei $V$ der reelle Vektorraum, der aus allen unendlich oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ besteht.

a) Zeige, dass die Ableitung $f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung von $V$ nach $V$ ist.
b) Bestimme die Eigenwerte der Ableitung und zu jedem Eigenwert mindestens einen Eigenvektor.[1]
c) Bestimme zu jeder reellen Zahl die Eigenräume und deren Dimension.

AUFGABE 39.3. Es sei $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum,

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Zeige folgende Aussagen.

(1) Der Eigenraum
$$\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$$
ist ein Untervektorraum von $V$.
(2) $\lambda$ ist genau dann ein Eigenwert zu $\varphi$, wenn der Eigenraum $\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$ nicht der Nullraum ist.
(3) Ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ist genau dann ein Eigenvektor zu $\lambda$, wenn $v \in \operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$ ist.

[1] In diesem Zusammenhang spricht man auch von *Eigenfunktionen*.

Aufgabe 39.4. Es sei $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass

$$\operatorname{kern} \varphi = \operatorname{Eig}_0(\varphi)$$

gilt.

Aufgabe 39.5. Es sei $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Sei $\lambda \in K$ und sei

$$U = \operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$$

der zugehörige Eigenraum. Zeige, dass sich $\varphi$ zu einer linearen Abbildung

$$\varphi|_U\colon U \longrightarrow U,\ v \longmapsto \varphi(v),$$

einschränken lässt, und dass diese Abbildung die Streckung um den Streckungsfaktor $\lambda$ ist.

Aufgabe 39.6. Es sei $K$ ein Körper und es sei $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass es dann nur endlich viele Eigenwerte zu $\varphi$ gibt.

Aufgabe 39.7. Zeige, dass jede Matrix

$$M \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$$

mindestens einen Eigenwert besitzt.

Aufgabe 39.8. Es sei

$$M \in \operatorname{Mat}_n(K)$$

eine Matrix mit $n$ (paarweise) verschiedenen Eigenwerten. Zeige, dass die Determinante von $M$ das Produkt der Eigenwerte ist.

Aufgabe 39.9. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

derart, dass $\varphi$ keine Eigenwerte besitzt, dass aber eine gewisse Potenz $\varphi^n$, $n \geq 1$, Eigenwerte besitzt.

Aufgabe 39.10. Es sei $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung mit

$$\varphi^n = \mathrm{Id}_V$$

für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$.[2] Zeige, dass jeder Eigenwert $\lambda$ von $\varphi$ die Eigenschaft $\lambda^n = 1$ besitzt.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 39.11. (2 Punkte)

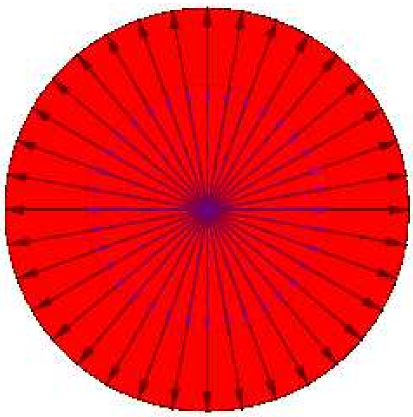
Es sei $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Elemente in $K$. Zeige, dass

$$\mathrm{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \mathrm{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) = 0\,.$$

ist.



Aufgabe 39.12. (3 Punkte)

Es sei $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass $\varphi$ genau dann eine Streckung ist, wenn jeder Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ein Eigenvektor von $\varphi$ ist.

[2]Der Wert $n = 0$ ist hier erlaubt, aber aussagelos.

Aufgabe 39.13. (3 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass $M$ als reelle Matrix keine Eigenwerte besitzt. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume von $M$ als komplexer Matrix.

Aufgabe 39.14. (6 Punkte)

Betrachte die reellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Man charakterisiere in Abhängigkeit von $a, b, c, d$, wann eine solche Matrix

(1) zwei verschiedene Eigenwerte,
(2) einen Eigenwert mit einem zweidimensionalen Eigenraum,
(3) einen Eigenwert mit einem eindimensionalen Eigenraum,
(4) keinen Eigenwert

besitzt.

Aufgabe 39.15. (6 Punkte)

Es sei $K$ ein Körper und es sei $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von $\varphi$ und $v$ ein zugehöriger Eigenvektor. Zeige, dass es zu einer gegebenen Basis $v, u_2, \ldots, u_n$ von $V$ eine Basis $v, w_2, \ldots, w_n$ gibt mit $\langle v, u_j \rangle = \langle v, w_j \rangle$ und mit

$$\varphi(w_j) \in \langle u_i,\, i = 2, \ldots, n \rangle$$

für alle $j = 2, \ldots, n$.

Zeige ebenso, dass dies bei $\lambda = 0$ nicht möglich ist.