Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2008/2009**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 21

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Beweise für einen diskreten Bewertungsring die Eigenschaften der Ordnung, die in Lemma 21.4 formuliert sind.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Sei R ein diskreter Bewertungsring. Definiere zu einem Element $q \in Q(R), q \neq 0$, die Ordnung

$$\operatorname{ord}(q) \in \mathbb{Z}\,.$$

Dabei soll die Definition mit der Ordnung für Elemente aus R übereinstimmen und einen Gruppenhomomorphismus $Q(R) - \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ definieren. Was ist der Kern dieses Homomorphismus?

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $K(T)$ der Körper der rationalen Funktionen über K. Finde einen diskreten Bewertungsring $R \subset K(T)$ mit $Q(R) = K(T)$ und mit $R \cap K[T] = K$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S integre K-Algebren von endlichem Typ. Es sei $\varphi : R \rightarrow S$ ein endlicher injektiver K-Algebra-Homomorphismus. Zeige, dass dann $\varphi^* : K\text{–Spek}\,(S) \rightarrow K\text{–Spek}\,(R)$ surjektiv ist.

Aufgabe 5. (6 Punkte)

Sei R ein Hauptidealbereich mit Quotientenkörper $Q = Q(R)$. Zeige, dass jeder Zwischenring $S, R \subseteq S \subseteq Q$, eine Nenneraufnahme ist.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q. Zeige, dass es keinen echten Zwischenring zwischen R und Q gibt.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q. Charakterisiere die endlich erzeugten R-Untermoduln von Q. Auf welche Form kann man ein Erzeugendensystem bringen?

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich mit Normalisierung R^{norm}. Zeige, dass durch

$$\mathfrak{f} = \{g \in R : \, gR^{\text{norm}} \subseteq R\}$$

ein Ideal in R gegeben ist.

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden natürlichen Zahlen erzeugt werde. Zeige, dass für das Führerideal des zugehörigen Monoidrings $K[M]$ die Beziehung

$$\mathfrak{f} = (M_{\geq f})$$

besteht, wobei f die Führerzahl des Monoids bezeichnet.

Die drei folgenden Aufgaben knüpfen an Diskussionen der Übung an.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden natürlichen Zahlen erzeugt sei. Zeige, dass die Einbettungsdimension maximal gleich der Multiplizität ist.

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein durch teilerfremde Zahlen erzeugtes numerisches Monoid, bei dem die Einbettungsdimension gleich der Multiplizität ist. Zeige, dass dann der maximale Erzeuger aus einem minimalen Erzeugendensystem größer oder gleich der Führerzahl ist.

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel eines numerischen Monoids M mit Multiplizität 3 und Einbettungsdimension 3 an, bei dem die Führerzahl prim ist und nicht zum minimalen Erzeugendensystem gehört.