

**Einführung in die mathematische Logik****Arbeitsblatt 6**

Bei den beiden folgenden Aufgaben soll mit den Peano-Axiomen der zweiten Stufe argumentiert werden.

AUFGABE 6.1. Zeige ausgehend von den Peano-Axiomen, dass jedes Element  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 0$ , einen Vorgänger besitzt.

AUFGABE 6.2. Man gebe Beispiele  $(M, 0, ')$  für Mengen mit einem ausgezeichneten Element  $0 \in M$  und einer Abbildung  $' : M \rightarrow M$  an, die je zwei der Peanoaxiome erfüllen, aber nicht das dritte.

AUFGABE 6.3. Zeige, dass in einer Sprache erster Stufe nur abzählbar viele Teilmengen von  $\mathbb{N}$  „adressierbar“ sind und dass daher das zweitstufige Induktionsaxiom der Peano-Axiome nicht in der ersten Stufe formulierbar ist.

AUFGABE 6.4. Beweise die aussagenlogische Tautologie

$$p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$$

aus den aussagenlogischen Axiomen.

AUFGABE 6.5. Es seien  $p_1, \dots, p_n$  Ausdrücke und es seien  $i_1, \dots, i_k$  Elemente aus  $\{1, \dots, n\}$ . Zeige, dass

$$\vdash p_1 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow p_{i_1} \wedge \dots \wedge p_{i_k}$$

gilt.

AUFGABE 6.6. Zeige

$$\vdash (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (\neg p \rightarrow q) \rightarrow r.$$

AUFGABE 6.7. Begründe die folgende Ableitungsregel: Aus  $\vdash \alpha$  und  $\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$  folgt  $\vdash \beta \rightarrow \gamma$ .

AUFGABE 6.8. Es seien  $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n$  Terme,  $f$  ein  $n$ -stelliges Funktionssymbol und  $R$  ein  $n$ -stelliges Relationssymbol. Zeige, dass die folgenden Aussagen im Prädikatenkalkül ableitbar sind.

2

$$(1) \quad \vdash s_1 = t_1 \wedge \dots \wedge s_n = t_n \rightarrow fs_1 \dots s_n = ft_1 \dots t_n.$$

$$(2) \quad \vdash s_1 = t_1 \wedge \dots \wedge s_n = t_n \wedge Rs_1 \dots s_n \rightarrow Rt_1 \dots t_n.$$