

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 6

Bei den beiden folgenden Aufgaben soll mit den Peano-Axiomen der zweiten Stufe argumentiert werden.

AUFGABE 6.1. Zeige ausgehend von den Peano-Axiomen, dass jedes Element $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, einen Vorgänger besitzt.

AUFGABE 6.2. Man gebe Beispiele $(M, 0, ')$ für Mengen mit einem ausgezeichneten Element $0 \in M$ und einer Abbildung $' : M \rightarrow M$ an, die je zwei der Peanoaxiome erfüllen, aber nicht das dritte.

AUFGABE 6.3. Zeige, dass in einer Sprache erster Stufe nur abzählbar viele Teilmengen von \mathbb{N} „adressierbar“ sind und dass daher das zweitstufige Induktionsaxiom der Peano-Axiome nicht in der ersten Stufe formulierbar ist.

AUFGABE 6.4. Beweise die aussagenlogische Tautologie

$$p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$$

aus den aussagenlogischen Axiomen.

AUFGABE 6.5. Es seien p_1, \dots, p_n Ausdrücke und es seien i_1, \dots, i_k Elemente aus $\{1, \dots, n\}$. Zeige, dass

$$\vdash p_1 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow p_{i_1} \wedge \dots \wedge p_{i_k}$$

gilt.

AUFGABE 6.6. Zeige

$$\vdash (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (\neg p \rightarrow q) \rightarrow r.$$

AUFGABE 6.7. Begründe die folgende Ableitungsregel: Aus $\vdash \alpha$ und $\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$ folgt $\vdash \beta \rightarrow \gamma$.

AUFGABE 6.8. Es seien $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n$ Terme, f ein n -stelliges Funktionssymbol und R ein n -stelliges Relationssymbol. Zeige, dass die folgenden Aussagen im Prädikatenkalkül ableitbar sind.

2

$$(1) \quad \vdash s_1 = t_1 \wedge \dots \wedge s_n = t_n \rightarrow fs_1 \dots s_n = ft_1 \dots t_n.$$

$$(2) \quad \vdash s_1 = t_1 \wedge \dots \wedge s_n = t_n \wedge Rs_1 \dots s_n \rightarrow Rt_1 \dots t_n.$$