Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik für Anwender I

Beispielklausur 2 mit Lösungen

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	4	4	7	4	3	5	3	2	3	6	3	6	6	64
erhalt. Pkt.:																

Note:

Aufgabe 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *injektive* Abbildung
$$f : M \longrightarrow N.$$
(2) Ein *Untervektorraum* $U \subseteq V$ in einem K-Vektorraum V.
(3) Eine *lineare* Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
(4) Die *geometrische Reihe* für $x \in \mathbb{R}$.
(5) Die *Stetigkeit* einer Abbildung
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
(6) Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
(7) Das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu einer n-mal differenzierbaren Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
im Punkt 0.
(8) Die *Fakultätsfunktion* $\operatorname{Fak}(x)$ (für $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$).

Lösung

(1) Die Abbildung
$$f : M \longrightarrow N$$
ist injektiv, wenn für je zwei verschiedene Elemente $x, y \in M$ auch $f(x)$ und $f(y)$ verschieden sind.
(2) Die Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum*, wenn die folgenden Eigenschaften gelten.
  (a) $0 \in U$.
  (b) Mit $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$.
  (c) Mit $u \in U$ und $s \in K$ ist auch $su \in U$.
(3) Eine Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.
  (a) $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.
  (b) $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in V$.

(4) Die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$
heißt die *geometrische Reihe* in x.

(5) Eine Abbildung
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
heißt stetig in a, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass
$$f\big(]x-\delta, x+\delta[\big) \subseteq]f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon[$$
gilt.

(6) Die Funktion f heißt *differenzierbar* in a, wenn der Limes
$$\lim_{x \in \mathbb{R}\setminus\{a\},\, x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
existiert.

(7) Das Polynom
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$
heißt das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu f in 0.

(8) Die Fakultätsfunktion ist durch das uneigentliche Integral
$$\operatorname{Fak}(x) := \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$
definiert.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Binomische Lehrsatz.*
(2) Das *Injektivitätskriterium für lineare Abbildungen.*
(3) Das *Quotientenkriterium* für Reihen.
(4) Der *Mittelwertsatz* der Integralrechnung.

Lösung

(1) Es seien a, b Elemente in einem Körper. Ferner sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

(2) Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
eine K-lineare Abbildung. Dann ist φ injektiv genau dann, wenn $\operatorname{kern} \varphi = 0$ ist.

(3) Es sei
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$
eine Reihe von reellen Zahlen. Es gebe eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ und ein k_0 mit
$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q$$
für alle $k \geq k_0$ (insbesondere sei $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$). Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

(4) Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei
$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit
$$\int_a^b f(t)\, dt = f(c)(b - a)\,.$$

Aufgabe 3. Zeige, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Abschätzung
$$3^n \geq n^3$$
gilt.

Lösung

Für $n = 1, 2, 3$ ergibt sich die Abschätzung durch direktes Nachrechnen. Für $n \geq 4$ wird die Aussage durch Induktion bewiesen. Wir nehmen also an, dass die Aussage für ein $n \geq 3$ schon bewiesen ist und haben sie für $n + 1$ zu zeigen. Dies ergibt sich aus
$$\begin{aligned} 3^{n+1} &= 3 \cdot 3^n \\ &\geq 3n^3 \\ &= n^3 + n^3 + n^3 \\ &\geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= (n + 1)^3, \end{aligned}$$
wobei wir in der zweiten Zeile die Induktionsvoraussetzung, in der vierten Zeile die Voraussetzung $n \geq 3$ und in der fünften Zeile die binomische Formel angewendet haben.

Aufgabe 4. Die Zeitungen A, B und C verkaufen Zeitungsabos und konkurrieren dabei um einen lokalen Markt mit 100000 potentiellen Lesern. Dabei sind innerhalb eines Jahres folgende Kundenbewegungen zu beobachten.

(1) Die Abonnenten von A bleiben zu 80% bei A, 10% wechseln zu B, 5% wechseln zu C und 5% werden Nichtleser.
(2) Die Abonnenten von B bleiben zu 60% bei B, 10% wechseln zu A, 20% wechseln zu C und 10% werden Nichtleser.

(3) Die Abonnenten von C bleiben zu 70% bei C, niemand wechselt zu A, 10% wechseln zu B und 20% werden Nichtleser.
(4) Von den Nichtlesern entscheiden sich je 10% für ein Abonnement von A, B oder C, die übrigen bleiben Nichtleser.

a) Erstelle die Matrix, die die Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres beschreibt.

b) In einem bestimmten Jahr haben alle drei Zeitungen je 20000 Abonnenten und es gibt 40000 Nichtleser. Wie sieht die Verteilung ein Jahr später aus?

c) Die drei Zeitungen expandieren in eine zweite Stadt, wo es bislang überhaupt keine Zeitungen gibt, aber ebenfalls 100000 potentielle Leser. Wie viele Leser haben dort die einzelnen Zeitungen (und wie viele Nichtleser gibt es noch) nach drei Jahren, wenn dort die gleichen Kundenbewegungen zu beobachten sind?

Lösung

a) Die Matrix, die die Kundenbewegungen (in der Reihenfolge A, B, C und Nichtleser) beschreibt, ist

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

b) Die Kundenverteilung nach einem Jahr zur Ausgangsverteilung

$(20000, 20000, 20000, 40000)$ ist

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20000 \\ 20000 \\ 20000 \\ 40000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22000 \\ 20000 \\ 23000 \\ 35000 \end{pmatrix}.$$

c) Die Ausgangsverteilung ist $(0, 0, 0, 100000)$, daher ist die Verteilung nach einem Jahr gleich $(10000, 10000, 10000, 70000)$.

Nach zwei Jahren ist die Kundenverteilung

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10000 \\ 10000 \\ 10000 \\ 70000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16000 \\ 15000 \\ 16500 \\ 52500 \end{pmatrix}.$$

Nach drei Jahren ist die Kundenverteilung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16000 \\ 15000 \\ 16500 \\ 52500 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 12800 + 1500 + 5250 \\ 1600 + 9000 + 1650 + 5250 \\ 800 + 3000 + 11550 + 5250 \\ 800 + 1500 + 3300 + 36750 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19550 \\ 17500 \\ 20600 \\ 42350 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass es einen K-Vektorraum W und eine surjektive K-lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

gibt derart, dass $U = \text{kern } \varphi$ ist.

Lösung

Der Unterraum U ist ebenfalls endlichdimensional. Es sei $u_1, u_2, \ldots, u_m$ eine Basis von U, die wir durch $v_1, \ldots, v_n \in V$ zu einer Basis von V ergänzen können. Es sei $W = K^n$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow K^n,$$

die durch

$$\varphi(u_i) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m$$

und

$$\varphi(v_j) = e_j \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

festgelegt ist (dabei sei e_j der j-te Standardvektor des K^n), was nach dem Basisfestlegungssatz möglich ist. Wegen

$$\varphi(\sum_{j=1}^{n} t_j v_j) = \sum_{j=1}^{n} t_j \varphi(v_j) = \sum_{j=1}^{n} t_j e_j$$

ist die Abbildung surjektiv. Offenbar ist $U \subseteq \text{kern } \varphi$. Es sei

$$v = \sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} t_j v_j \in \text{kern } \varphi \,.$$

Dann ist

$$0 \;=\; \varphi(v) \;=\; \sum_{j=1}^{n} t_j e_j .$$

Da die Standardbasis vorliegt, sind die $t_j = 0$ und daher ist $v \in U$. Also ist $U = \text{kern } \varphi$.

Aufgabe 6. Bestimme die komplexen Zahlen z, für die die Matrix

$$\begin{pmatrix} z & 2 & 2z+1 \\ 3 & 1 & 4 \\ z & 5 & z \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar ist.

Lösung

Die Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante $\neq 0$ ist. Wir müssen also die Nullstellen der Determinante bestimmen. Die Determinante ist (nach der Regel von Sarrus)

$$z^2 + 8z + 30z + 15 - 2z^2 - z - 20z - 6z \;=\; -z^2 + 11z + 15.$$

Dies ist gleich 0 genau dann, wenn

$$z^2 - 11z - 15 = 0$$

ist. Durch quadratisches Ergänzen führt diese Gleichung auf

$$\left(z - \frac{11}{2} \right)^2 \;=\; 15 + \frac{121}{4} \;=\; \frac{181}{4}.$$

Daher sind

$$z_1 = \frac{\sqrt{181}}{2} + \frac{11}{2} = \frac{11 + \sqrt{181}}{2} \text{ und } z_2 = -\frac{\sqrt{181}}{2} + \frac{11}{2} = \frac{11 - \sqrt{181}}{2}$$

die beiden einzigen Lösungen der quadratischen Gleichung. Diese zwei reellen Zahlen sind also die einzigen (reellen oder komplexen) Zahlen, für die die Matrix nicht invertierbar ist.

Aufgabe 7. Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $a_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen a_1, a_2, a_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Lösung

Die Formel für a_{n+1} lautet
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right).$$
Daher ist
$$a_1 \;=\; \frac{1}{2}\left(3+\frac{7}{3}\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{9+7}{3}\right) \;=\; \frac{16}{6} \;=\; \frac{8}{3}.$$
Somit ist
$$a_2 \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}+\frac{7}{8/3}\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}+\frac{21}{8}\right) \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{64+63}{24} \;=\; \frac{127}{48}.$$
Schließlich ist
$$a_3 \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{127}{48}+\frac{7}{127/48}\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{127}{48}+\frac{336}{127}\right) \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{16129+16128}{6096} \;=\; \frac{32257}{12192}.$$

Aufgabe 8. Untersuche, ob die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{4n^3-3n+2}$$
konvergiert oder divergiert.

Lösung

Für $n \geq 5$ ist
$$2n+5 \;\leq\; 3n$$
und für $n \geq 1$ ist
$$4n^3-3n+2 \;=\; n^3+3n^3-3n+2 \;\geq\; n^3+3n(n^2-1) \;\geq\; n^3.$$
Daher gilt für die Reihenglieder für $n \geq 5$ die Abschätzung
$$\frac{2n+5}{4n^3-3n+2} \;\leq\; \frac{3n}{4n^3-3n+2} \;\leq\; \frac{3n}{n^3} \;=\; 3\frac{1}{n^2}.$$
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert nach Beispiel ***** und dies gilt auch für $\sum_{n=1}^{\infty} 3\frac{1}{n^2}$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert auch
$$\sum_{n=5}^{\infty}\frac{2n+5}{4n^3-3n+2}$$
und daher konvergiert auch die in Frage stehende Reihe.

Aufgabe 9. Berechne das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe.

Lösung

Die geometrische Reihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ und die Exponentialreihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. Das Cauchy-Produkt von zwei Reihen ergibt sich einfach dadurch, dass man jeden Summanden mit jedem Summanden multipliziert und gleiche Potenzen aufsummiert. Daher können die Potenzen x^5, x^6, etc. ignoriert werden und es ist

$$\begin{aligned} & (1+x+x^2+x^3+x^4)\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4\right) \\ = & \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4\right)+\left(x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4\right)+\left(x^2+x^3+\frac{1}{2}x^4\right)+x^3+x^4+ \\ = & 1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+\frac{65}{24}x^4+\ldots . \end{aligned}$$

Das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz der beiden Reihen ist also

$$1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+\frac{65}{24}x^4 .$$

AUFGABE 10. Wir betrachten die Funktion

$$f:\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \cos(\ln x) .$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Lösung

a) Es ist

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \cdot \sin(\ln x).$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\left(\frac{\sin(\ln x)}{x}\right)' \\ &= -\frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x^2} \\ &= -\frac{\cos(\ln x)}{x^2} + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}. \end{aligned}$$

AUFGABE 11. Wir betrachten die Funktion

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^2+1.$$

Bestimme die Tangenten an f, die lineare Funktionen sind (die also durch den Nullpunkt verlaufen).

Lösung

Eine lineare Funktion wird durch $g(x) = ax$ mit $a \in \mathbb{R}$ beschrieben. Eine lineare Funktion, die im Punkt $(x, f(x))$ tangential zu f ist, muss $a = f'(x)$ und $f(x) = ax$ erfüllen. Daraus ergibt sich die Bedingung

$$x^2 + 1 = (2x)x$$

bzw.

$$x^2 = 1\,.$$

Also ist $x = 1$ oder $x = -1$. Daher gibt es zwei Tangenten an f, die lineare Funktionen sind, nämlich $2x$ und $-2x$.

Aufgabe 12. Beweise den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Lösung

Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Über dem kompakten Intervall $[a, b]$ ist die Funktion f nach oben und nach unten beschränkt, es seien m und M das Minimum bzw. das Maximum der Funktion. Dann ist insbesondere $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ und

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)\,.$$

Daher ist $\int_a^b f(t)\,dt = d(b-a)$ mit einem $d \in [m, M]$ und aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = d$.

Aufgabe 13. Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x+3} - e^{-x},$$

über $[1, 4]$.

Lösung

Eine Stammfunktion zu f ist

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\ln(2x+3) + e^{-x}\,.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x)\,dx &= F(4) - F(1)\\ &= \frac{16}{3} - 4 + \frac{1}{2}\ln 11 + e^{-4} - \frac{2}{3} + 2 - \frac{1}{2}\ln 5 - e^{-1}\end{aligned}$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{11}{5} + e^{-4} - e^{-1}.$$

Aufgabe 14. Es sei

$$f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3}.$$

a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von $f(x)$.

b) Bestimme eine Stammfunktion von $f(x)$.

Lösung

a) Division mit Rest ergibt

$$x^3 + 7x^2 - 5x + 4 = (x^2 - 3)(x + 7) - 2x + 25.$$

Daher ist

$$\frac{x^3 + 7x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3} = x + 7 + \frac{-2x + 25}{x^2 - 3}.$$

Wegen $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ machen wir den Ansatz

$$\frac{-2x + 25}{x^2 - 3} = \frac{a}{x - \sqrt{3}} + \frac{b}{x + \sqrt{3}}.$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned} -2x + 25 &= a(x + \sqrt{3}) + b(x - \sqrt{3}) \\ &= (a + b)x + (a - b)\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Somit ist $a + b = -2$ und $a - b = \frac{25}{\sqrt{3}}$, woraus sich $2a = -2 + \frac{25}{\sqrt{3}}$ und $2b = -2 - \frac{25}{\sqrt{3}}$ ergibt. Also ist

$$a = -1 + \frac{25}{2\sqrt{3}} \text{ und } b = -1 - \frac{25}{2\sqrt{3}}.$$

Somit ist die Partialbruchzerlegung gleich

$$\frac{x^3 + 7x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3} = x + 7 + \frac{-1 + \frac{25}{2\sqrt{3}}}{x - \sqrt{3}} + \frac{-1 - \frac{25}{2\sqrt{3}}}{x + \sqrt{3}}.$$

b) Eine Stammfunktion zu $f(x)$ ist (auf dem Definitionsbereich)

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 7x + \left(-1 + \frac{25}{2\sqrt{3}}\right) \ln |x - \sqrt{3}| + \left(-1 - \frac{25}{2\sqrt{3}}\right) \ln |x + \sqrt{3}|.$$

Aufgabe 15. a) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t}.$$

b) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t} + t^7 \,.$$

c) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{t} + t^7 \text{ und } y(1) = 5 \,.$$

Lösung

a) Nach dem Lösungsansatz für homogene lineare Differentialgleichungen müssen wir zuerst eine Stammfunktion von $\frac{1}{t}$ bestimmen, eine solche ist $\ln t$. Die Exponentialfunktion davon ist t, so dass $y = ct$ (mit $c \in \mathbb{R}$) die Lösungen von $y' = y/t$ sind.

b) Eine Stammfunktion zu $\frac{t^7}{t} = t^6$ ist

$$\frac{1}{7}t^7 \,.$$

Damit ist

$$\frac{1}{7}t^7 \cdot t = \frac{1}{7}t^8$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und somit sind

$$\frac{1}{7}t^8 + ct,\ c \in \mathbb{R},$$

alle Lösungen.

c) Wenn zusätzlich die Anfangsbedingung $y(1) = 5$ erfüllt sein soll, so muss

$$\frac{1}{7} + c = 5$$

gelten, also

$$c \;=\; 5 - \frac{1}{7} \;=\; \frac{34}{7}.$$

Die Lösungs des Anfangsproblems ist also

$$y(t) = \frac{1}{7}t^8 + \frac{34}{7}t \,.$$