Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 6

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 6.1. Zeige, dass das Bild unter einem Ringhomomorphismus ein Unterring ist.

Aufgabe 6.2. Zeige, dass das Bild eines Ideals unter einem Ringhomomorphismus nicht unbedingt wieder ein Ideal ist.

Aufgabe 6.3. Es sei $A \subseteq \mathbb{Q}$ die Menge derjenigen rationalen Zahlen, die eine abbrechende Dezimalentwicklung besitzen. Zeige, dass A ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist und bestimme die Einheiten von A.

Aufgabe 6.4. Sei R ein kommutativer Ring mit endlich vielen Elementen. Zeige, dass R genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn R ein Körper ist.

Aufgabe 6.5. Zeige, dass ein kommutativer Ring genau dann ein Körper ist, wenn er genau zwei Ideale enthält.

Aufgabe 6.6. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Berechne das Bild des Polynoms X^3+4X-3 unter dem durch $X \mapsto X^2+X-1$ definierten Einsetzungshomomorphismus $K[X] \to K[X]$.

Aufgabe 6.7. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$ ein fixiertes Element. Bestimme den Kern des Einsetzungshomomorphismus

$$K[X] \longrightarrow K,\ X \longmapsto a.$$

Aufgabe 6.8. Es sei $C = \mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Entscheide, ob die folgenden Teilmengen von C einen Unterring bilden.

(1) Die Menge der stetigen 2π-periodischen Funktionen.
(2) Die Menge der stetigen geraden Funktionen.

(3) Die Menge der stetigen ungeraden Funktionen.

Aufgabe 6.9. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und es sei $D_{\mathbb{K}} = \mathrm{C}^1(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ der Ring der stetig-differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{K}$. Zeige, dass der Einsetzungshomomorphismus

$$\Psi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow D_{\mathbb{K}},\ X \longmapsto \mathrm{id}_{\mathbb{K}},$$

injektiv ist. Bestimme die Polynome $F \in \mathbb{K}[X]$, für die $\Psi(F)$ eine Einheit in $D_{\mathbb{K}}$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.10. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Berechne das Bild des Polynoms $X^4 - 2X^2 + 5X - 2$ unter dem durch $X \mapsto 2X^3 + X - 1$ definierten Einsetzungshomomorphismus $K[X] \to K[X]$.

Aufgabe 6.11. (5 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $P \in K[X]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zeige, dass der durch $X \mapsto P$ definierte Einsetzungshomomorphismus von $K[X]$ nach $K[X]$ injektiv ist und dass der durch P erzeugte Unterring $K[P] \subseteq K[X]$ isomorph zum Polynomring in einer Variablen ist.

Zeige, dass bei $\operatorname{grad}(P) \geq 2$ ein echter Unterring $K[P] \subset K[X]$ vorliegt.

Aufgabe 6.12. (2 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich und $R[X]$ der Polynomring über R. Zeige, dass die Einheiten von $R[X]$ genau die Einheiten von R sind.

Aufgabe 6.13. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper. Betrachte den Matrizenring $\mathrm{Mat}_3(K)$ und darin die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Definiere einen Ringhomomorphismus

$$K[X] \longrightarrow \mathrm{Mat}_3(K),$$

der X auf M schickt. Bestimme den Kern dieser Abbildung.