Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Vorkurs Mathematik

Vorlesung 2

Mengen

Eine *Menge* ist eine Ansammlung von wohlunterschiedenen Objekten, die die *Elemente* der Menge heißen. Mit „wohlunterschieden“ meint man, dass es klar ist, welche Objekte als gleich und welche als verschieden angesehen werden. Die *Zugehörigkeit* eines Elementes x zu einer Menge M wird durch

$$x \in M$$

ausgedrückt, die Nichtzugehörigkeit durch

$$x \notin M .$$

Für jedes Element(symbol) gilt stets genau eine dieser zwei Möglichkeiten.

Georg Cantor (1845-1918) ist der Schöpfer der Mengentheorie.

David Hilbert (1862-1943) nannte sie ein Paradies, aus dem die Mathematiker nie mehr vertrieben werden dürfen.

Für Mengen gilt das *Extensionalitätsprinzip*, d.h. eine Menge ist durch die in ihr enthaltenen Elemente eindeutig bestimmt, darüber hinaus bietet sie keine Information. Insbesondere stimmen zwei Mengen überein, wenn beide die gleichen Elemente enthalten.

Die Menge, die kein Element besitzt, heißt *leere Menge* und wird mit

$$\emptyset$$

bezeichnet.

Eine Menge N heißt *Teilmenge* einer Menge M, wenn jedes Element aus N auch zu M gehört. Man schreibt dafür

$$N \subseteq M$$

(manche schreiben dafür $N \subset M$). Man sagt dafür auch, dass eine *Inklusion* $N \subseteq M$ vorliegt. Im Nachweis, dass $N \subseteq M$ ist, muss man zeigen, dass für ein beliebiges Element $x \in N$ ebenfalls die Beziehung $x \in M$ gilt.[1] Dabei darf man lediglich die Eigenschaft $x \in N$ verwenden.

Aufgrund des Extensionalitätsprinzips hat man das folgende wichtige *Gleichheitsprinzip für Mengen*, dass

$$M = N \text{ genau dann, wenn } N \subseteq M \text{ und } M \subseteq N$$

gilt. In der mathematischen Praxis bedeutet dies, dass man die Gleichheit von zwei Mengen dadurch nachweist, dass man (in zwei voneinander unabhängigen Teilargumentationen) die beiden Inklusionen zeigt. Dies hat auch den kognitiven Vorteil, dass das Denken eine Zielrichtung bekommt, dass klar die Voraussetzung, die man verwenden darf, von der gewünschten Schlussfolgerung, die man aufzeigen muss, getrennt wird. Hier wiederholt sich das Prinzip, dass die Äquivalenz von zwei Aussagen die wechselseitige Implikation bedeutet, und durch den Beweis der beiden einzelnen Implikationen bewiesen wird.

Beschreibungsmöglichkeiten für Mengen

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Menge anzugeben. Die einfachste ist wohl, die zu der Menge gehörenden Elemente aufzulisten, wobei es auf die Reihenfolge der Elemente nicht ankommt.

Betrachte die beiden Auflistungen

$$\{\text{Paris, London, Osnabrück}\}$$

und

$$\{\text{Paris, London, Osnabrück, die einwohnerreichste Stadt von Frankreich,}$$
$$\text{die Hauptstadt von Großbritannien, Londres, die Stadt in der wir leben}\}\,.$$

Handelt es sich um die gleiche Menge? Ein mathematisches Beispiel von dieser Art ist

$$\{0, 1, 2, 3\}$$

und

$$\{0, 0+1, 1+1, 1+(0+1), \text{der Nachfolger von } 1, 1 \cdot 2+1, 3-1, \text{zwei}, 8-6\}\,.$$

Es ist keine triviale Frage, ob es sich um die gleiche Menge handelt oder nicht. Die Beantwortung hängt davon ab, ob wir bei den zweiten Mengen die bezeichneten Objekte oder die bezeichnenden Symbole (also die Wörter,

[1] In der Sprache der Quantorenlogik kann man eine Inklusion verstehen als die Aussage $\forall x(x \in N \to x \in M)$.

die Wortketten, die Beschreibungen) selbst meinen. „Die einwohnerreichste Stadt von Frankreich“ und „Paris“ sind unterschiedliche Bezeichnungen für die gleiche Stadt. Insofern kann man sagen, dass das Problem nicht auf der Ebene der Mengen besteht, sondern auf der Ebene der Elemente und ihren Bezeichnungen, ob man bspw. mit „Paris“ die zugehörige Stadt meint oder die zugehörige „Buchstabenfolge“. Von der Menge (bzw. den „umgebenden Elementen“) hängt es allerdings schon ab, welcher Kontext erzeugt wird, von dem aus dann auch die einzelnen Elementbezeichner interpretiert werden. In der Menge

$$\{\text{Paris}, \text{London}, \text{Osnabrück}\}$$

wird man das erste Element vermutlich spontan als die Stadt verstehen, in der Menge

$$\{\text{Paris}, \text{Parole}, \text{Party}\}$$

wohl eher als Buchstabenfolge. Im Zweifelsfall muss eben der Kontext deutlich gemacht werden. In der Mathematik handelt es sich dabei selten um ein echtes Problem, in aller Regel meint man bei einer Auflistung die durch die Symbole gemeinten mathematischen Zahlen und sonstigen Objekte. In der mathematischen Logik ist zwar eine Menge wie z.B. „die Menge aller arithmetisch sinnvollen Ausdrücke“ wichtig, in der Mathematik selbst aber nicht. Dort sind die Ausdrücke (*Terme*) zumeist auf eine bestimmte (Zahl)-Menge bezogen und in diesen zu interpretieren. Im mathematischen Kontext gibt es eine Vielzahl von Möglichkeiten, um ein mathematisches Objekt (bspw. eine Zahl) auszudrücken. Wenn zwei unterschiedliche Ausdrücke oder Terme die gleiche Zahl beschreiben, so meint man, dass es sich um das gleiche Element der entsprechenden Zahlmenge handelt. Der Nachweis, dass zwei verschiedene Terme die gleiche Zahl bezeichnen, kann durchaus schwierig sein. Dieser Nachweis wird *rechnen* genannt, insbesondere dann, wenn die Gleichheit eines mehr oder weniger komplizierten Ausdrucks (wie z.B. $1 \cdot 2 + 1$) mit einem einfachen Repräsentaten (z.B. 3) nachgewiesen wird.

Auflistungen mit Fortsetzung

Neben endlichen Auflistungen gibt es auch noch solche Auflistungen, bei denen nach einer endlichen Auflistung eine unendliche Weiterführung durch Punkte ($\ldots$) angedeutet wird. Damit ist gemeint, dass die ersten Elemente der Auflistung einen Bildungsprozess erkennen lassen, mit dem man alle weiteren Elemente bestimmen kann. Beispiele sind

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\},\ \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\},\ \{9, 99, 999, 9999, 99999, \ldots\}$$

und ähnliche. Dies ist grundsätzlich problematisch, da es für jede endliche Liste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von n Zahlen ein Polynom

$$P(k) = c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + c_3 k^3 + \ldots + c_d k^d$$

vom Grad $d \leq n$ gibt mit

$$P(1) = a_1,\ P(2) = a_2, \ldots, P(n) = a_n\,.$$

Es gibt also stets ein mehr oder weniger einfaches polynomiales Bildungsgesetz, das aber oben nur im linken Beispiel die vermutlich gemeinte Vorschrift ist.

Die wichtigste Menge, die man zumeist als eine fortgesetzte Auflistung einführt, ist die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Hier wird eine bestimmte Zahlmenge durch die Anfangsglieder von erlaubten Zifferfolgen angedeutet. Wir werden diese Menge erstmal so akzeptieren und später noch eine Axiomatik dafür angeben.[2] Wichtig ist aber, dass mit $\mathbb{N}$ nicht eine Menge von bestimmten Ziffern gemeint ist, sondern die durch die Ziffern repräsentierten Zahlwerte. Eine natürliche Zahl hat viele Darstellungsarten, die Ziffernrepräsentation im Zehnersystem ist nur eine davon, wenn auch eine besonders übersichtliche.

Mengenbeschreibung durch Eigenschaften

Es sei eine Menge M gegeben. In ihr gibt es gewisse Elemente, die gewisse Eigenschaften E (Prädikate) erfüllen können oder aber nicht. Zu einer Eigenschaft E gehört innerhalb von M die Teilmenge bestehend aus allen Elementen aus M, die diese Eigenschaft erfüllen. Man beschreibt eine durch eine Eigenschaft definierte Teilmenge meist als

$$\{x \in M : E(x)\} = \{x \in M : x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}.$$

Dies geht natürlich nur mit solchen Eigenschaften, für die die Aussage $E(x)$ eine wohldefinierte Bedeutung hat. Wenn man eine solche Teilmenge einführt, so gibt man ihr häufig sofort einen Namen (in dem auf die Eigenschaft E Bezug genommen werden kann, aber nicht muss). Z.B. kann man einführen

$$G = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist gerade}\},$$
$$U = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist ungerade}\},$$
$$Q = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist eine Quadratzahl}\},$$
$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist eine Primzahl}\}.$$

Für die Mengen in der Mathematik sind meist eine Vielzahl an mathematischen Eigenschaften relevant und daher gibt es meist auch eine Vielzahl an relevanten Teilmengen. Aber auch bei alltäglichen Mengen, wie etwa die Menge K der Studierenden in einem Kurs, gibt es viele wichtige Eigenschaften, die gewisse Teilmengen festlegen, wie etwa

$$O = \{x \in K : x \text{ kommt aus Osnabrück}\},$$
$$P = \{x \in K : x \text{ studiert im Nebenfach Physik}\},$$
$$D = \{x \in K : x \text{ hat im Dezember Geburtstag}\}.$$

[2] Und zwar werden wir später die natürlichen Zahlen mittels der Peano-Axiome axiomatisieren, bis dahin verwenden wir sie aber schon manchmal, vor allem in Beispielen, ebenso wie die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Die Menge K ist dabei selbst durch eine Eigenschaft festgelegt, es ist ja

$$K = \{x : x \text{ ist Studierender in diesem Kurs}\} .$$

Mengenoperationen

So, wie man Aussagen zu neuen Aussagen verknüpfen kann, gibt es Operationen, mit denen aus Mengen neue Mengen enstehen.

- *Vereinigung*
$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\} ,$$
- *Durchschnitt*
$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\} ,$$
- *Differenzmenge*
$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\} .$$

Diese Operationen ergeben nur dann einen Sinn, wenn die beteiligten Mengen als Teilmengen in einer gemeinsamen Grundmenge gegeben sind. Dies sichert, dass man über die gleichen Elemente spricht. Häufig wird diese Grundmenge nicht explizit angegeben, dann muss man sie aus dem Kontext erschließen. Ein Spezialfall der Differenzmenge bei einer gegebenen Grundmenge ist das *Komplement* einer Teilmenge $A \subseteq G$, das durch

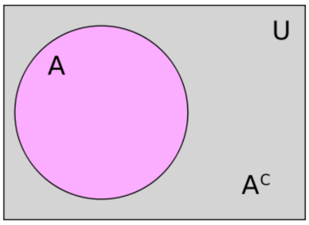
$$CA = G \setminus A = \{x \in G : x \notin A\}$$

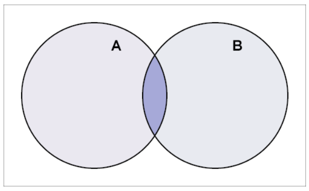
definiert ist. Wenn zwei Mengen einen leeren Schnitt haben, also $A \cap B = \emptyset$ gilt, so nennen wir sie *disjunkt*.

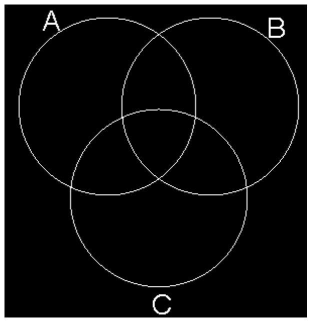
Mengendiagramme

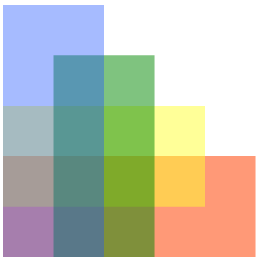
Eine Möglichkeit, Mengen oder vielmehr die zwischen verschiedenen Mengen möglichen oder existierenden Verhältnisse zueinander abzubilden, liefern *Mengendiagramme* (oder *Venn-Diagramme*). In ihnen werden Mengen durch gewisse Flächenstücke in der Ebene repräsentiert. Die Flächenstücke sollten eine möglichst einfache Form besitzen. Sie sind zumeist „zusammenhängend“ (d.h. je zwei Punkte des Stückes sind durch einen „stetigen Weg“ miteinander verbindbar). Die Flächenstücke können sich überlappen, und der Überlappungsbereich repräsentiert die Schnittmenge. Idealerweise sind die auftretenden Überlappungsbereiche selbst wieder zusammenhängend. Die verschiedenen Flächenstücke werden häufig in unterschiedlichen Farben oder Schraffuren gezeichnet, wobei dann die Überlappungsbereiche durch die zugehörigen Farbmischungen bzw. Mischschraffuren wiedergegeben werden. Sie werden aber oft auch nur durch ihre Begrenzung wiedergegeben, wobei dann bei Überschneidungen der Grenzlinien das Problem auftritt, wie die Grenzlinien weiterlaufen. Hier gilt zumeist die (unausgesprochene) Konvention, dass die „geraden“ bzw. „glatten“ Kurven die Ränder der beteiligten Einzelmengen sind, während sich für die Schnittmengen „eckige“ Ränder ergeben können.

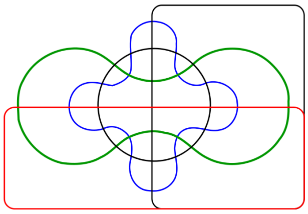
Einige Beispiele für abstrakte Mengendiagramme

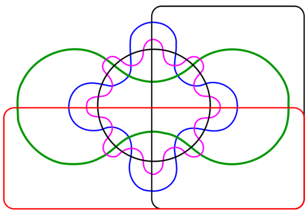


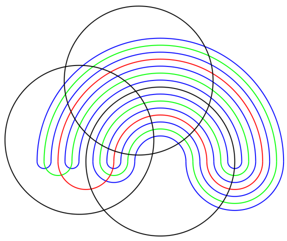




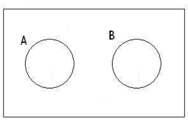


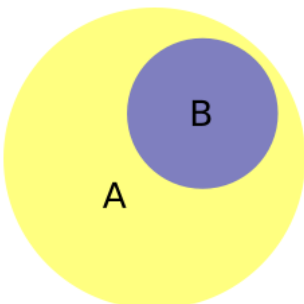


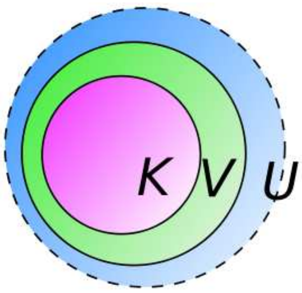


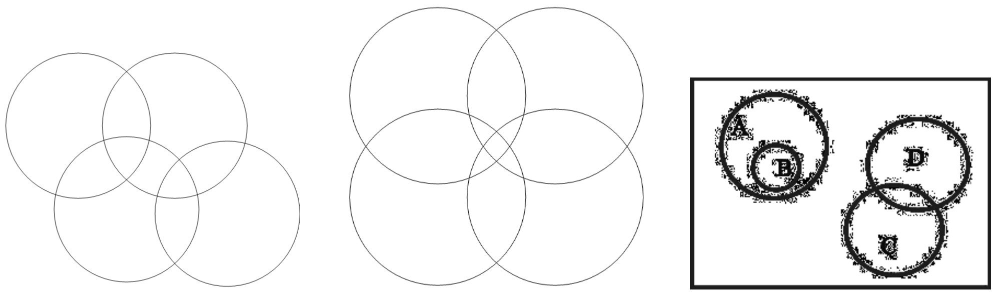


Diese Diagramme sind vollständig in dem Sinne, dass sie alle möglichen Schnitteigenschaften der beteiligten Mengen repräsentieren. In den folgenden Diagrammen wird nicht jede mögliche Schnitteigenschaft repräsentiert.



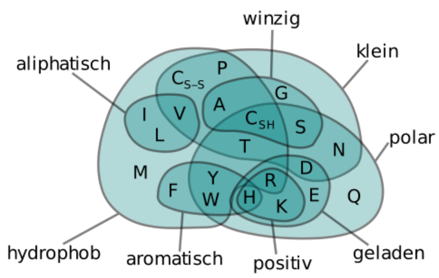


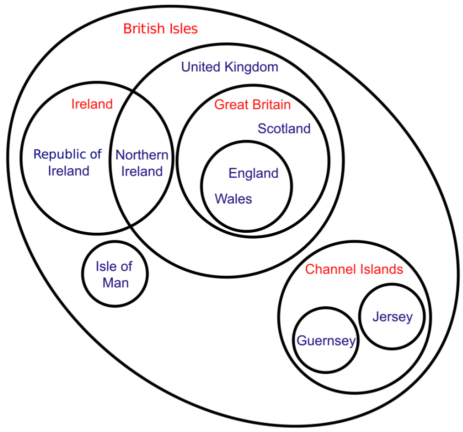


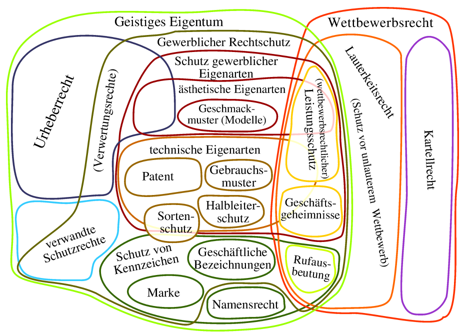


Einige Beispiele für konkrete Mengen-Diagramme

In diesem Fall repräsentieren die beteiligten Mengen einen bestimmten Begriff, das Schnittverhalten hängt dann von inhaltlichen Überlegungen ab. Solche Diagramme spielen in der Mathematik keine große Rolle. Wenn man allerdings z. B. verschiedene algebraische Begriffe wie Gruppe, Ring, kommutativer Ring, Divisionsbereich, Körper in ihrer Hierarchie veranschaulichen möchte, so ist ein solches Diagramm durchaus sinnvoll.







Konstruktion von Mengen

Die meisten Mengen in der Mathematik ergeben sich ausgehend von einigen wenigen Mengen wie bspw. den endlichen Mengen und $\mathbb{N}$ (die man sicher auch ohne jede tiefere Rechtfertigung als Menge akzeptieren kann) durch bestimmte Konstruktionen von neuen Mengen aus schon bekannten oder schon zuvor konstruierten Mengen.[3] Wir definieren[4]

DEFINITION 2.1. Es seien zwei Mengen L und M gegeben. Dann nennt man die Menge

$$L \times M = \{(x, y) : x \in L, y \in M\}$$

die *Produktmenge*[5] der beiden Mengen.

Die Elemente der Produktmenge nennt man *Paare* und schreibt (x, y). Dabei kommt es wesentlich auf die Reihenfolge an. Die Produktmenge besteht also aus allen Paarkombinationen, wo in der ersten *Komponenten* ein Element der ersten Menge und in der zweiten Komponenten ein Element der zweiten Menge steht. Zwei Paare sind genau dann gleich, wenn sie in beiden Komponenten gleich sind.

Bei einer Produktmenge können natürlich auch beide Mengen gleich sein. Dann ist es verlockend, die Reihenfolge zu verwechseln, und also besonders wichtig, darauf zu achten, dies nicht zu tun. Wenn es in der ersten Menge n Elemente und in der zweiten Menge k Elemente gibt, so gibt es in der Produktmenge $n \cdot k$ Elemente. Wenn eine der beiden Mengen leer ist, so ist auch die Produktmenge leer. Man kann auch für mehr als nur zwei Mengen die Produktmenge bilden, worauf wir bald zurückkommen werden.

BEISPIEL 2.2. Es sei V die Menge aller Vornamen (sagen wir der Vornamen, die in einer bestimmten Grundmenge an Personen wirklich vorkommen) und N die Menge aller Nachnamen. Dann ist

$$V \times N$$

die Menge aller Namen. Aus einem Namen lässt sich einfach der Vorname und der Nachname herauslesen, indem man entweder auf die erste oder auf die zweite Komponente des Namens schaut. Auch wenn alle Vornamen und Nachnamen für sich genommen vorkommen, so muss natürlich nicht jeder

[3] darunter fallen auch der Schnitt und die Vereinigung, doch bleiben diese innerhalb einer vorgegebenen Grundmenge, während es hier um Konstruktionen geht, die darüber hinaus gehen.

[4] Definitionen werden in der Mathematik zumeist als solche deutlich herausgestellt und bekommen eine Nummer, damit man auf sie einfach Bezug nehmen kann. Es wird eine Situation beschrieben, bei der die verwendeten Begriffe schon zuvor definiert worden sein mussten, und in dieser Situation wird einem neuen Konzept ein Namen (eine Bezeichnung) gegeben. Dieser Namen wird *kursiv* gesetzt. Man beachte, dass das Konzept auch ohne den neuen Namen formulierbar ist, der neue Name ist nur eine Abkürzung für das Konzept. Sehr häufig hängen die Begriffe von Eingaben ab, wie den beiden Mengen in dieser Definition. Bei der Namensgebung herrscht eine gewisse Willkür, so dass die Bedeutung der Bezeichnung im mathematischen Kontext sich allein aus der expliziten Definition, aber nicht aus der alltäglichen Wortbedeutung erschließen lässt

[5] Man spricht auch vom *kartesischen Produkt* der beiden Mengen

daraus gebastelte mögliche Name wirklich vorkommen. Bei der Produktmenge werden eben alle Kombinationsmöglichkeiten aus den beiden beteiligten Mengen genommen.

Beispiel 2.3. Bei zwei reellen Intervallen $M = [a, b]$ und $L = [c, d]$ ist die Produktmenge einfach das Rechteck

$$[a, b] \times [c, d] .$$

Allerdings muss man bei einem Rechteck im Hinterkopf behalten, welche Seite das erste und welche Seite das zweite Intervall ist. Für $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ schreibt man häufig auch $\mathbb{R}^2$.

Beispiel 2.4. Häufig werden Paare nicht in der Form (x, y) geschrieben, sondern in einer anderen Form, die aber ebenfalls die Position im Paar, also die Zugehörigkeit zu einer der beteiligten Mengen, ausdrücken muss. Betrachten wir z.B. die Produktmenge

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$$

und schreiben die Paare als x/y oder als

$$\frac{x}{y} .$$

Bei dieser Schreibweise soll der „Zähler“ (also das oberhalb des Striches) aus der ersten Menge $\mathbb{Z}$ sein und der „Nenner“ aus $\mathbb{N}_+$. Hier wird also ein Paar als ein *formaler Bruch* geschrieben. Man beachte aber, dass auf dieser Ebene keine Identifizierung zwischen den beiden Paaren $(3, 2)$ und $(6, 4)$ stattfindet, wie dies bei der inhaltlichen Interpretation als rationale Zahl geschieht. Es gibt aber eine (surjektive, nicht injektive) Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{Q},\ (x, y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

Eine andere wichtige Konstruktion, um aus einer Menge eine neue Menge zu erhalten, ist die Potenzmenge.

Definition 2.5. Zu einer Menge M nennt man die Menge aller Teilmengen von M die *Potenzmenge* von M. Sie wird mit

$$\mathfrak{P}(M)$$

bezeichnet.

Wenn eine Menge n Elemente besitzt, so besitzt ihre Potenzmenge 2^n Elemente.

Abbildungsverzeichnis