Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 18

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 18.1. Es sei K ein kommutativer Ring und $H = K[X]$ sei mit der in Beispiel 17.9 eingeführten (additiven) K-Hopf-Algebrastruktur versehen. Zeige, dass zu einer kommutativen K-Algebra L die induzierte Gruppenstruktur auf $L \cong (\operatorname{Spek}(H))(L)$ mit der Addition auf L übereinstimmt.

AUFGABE 18.2. Es sei K ein kommutativer Ring und H eine kommutative K-Hopf-Algebra zusammen mit einer Kooperation auf der kommutativen K-Algebra R. Wir betrachten die beiden K-Algebrahomomorphismen

$$N\colon R \longrightarrow H \otimes_K R$$

(die Kooperation) und

$$\iota_2\colon R \longrightarrow H \otimes_K R,\, r \longmapsto 1 \otimes r.$$

Zeige, dass die Menge

$$\{r \in R \mid N(r) = \iota_2(r)\}$$

ein Unterring von R ist.

Den in der vorstehenden Aufgabe definierten Unterring nennt man auch den *Invariantenring der Kooperation.*

AUFGABE 18.3. Es sei X eine Menge, auf der eine Gruppe G operiere, und sei

$$\varphi\colon X \longrightarrow Y$$

eine Abbildung in einer weitere Menge Y. Zeige, dass φ genau dann G-invariant ist, wenn das Diagramm

$$G \times X \overset{\nu, p_2}{\longrightarrow} X \longrightarrow Y$$

kommutiert.

AUFGABE 18.4. Es sei K ein kommutativer Ring und R eine kommutative K-Algebra, auf der eine endliche Gruppe G als Gruppe von K-Algebraautomorphismen operiere.

(1) Definiere eine Kooperation der Hopf-Algebra $H = \text{Abb}\,(G, K)$ auf R derart, dass man über die zugehörige Operation der Spektren die ursprüngliche Operation zurückgewinnt.
(2) Zeige, dass der Invariantenring R^G mit dem Invariantenring zur Kooperation übereinstimmt.

AUFGABE 18.5. Es sei K ein kommutativer Ring, D eine kommutative Gruppe und $K[D]$ der zugehörige Gruppenring mit der in Beispiel 17.11 beschriebenen Hopf-Struktur. Es sei A eine kommutative K-Algebra.

(1) Es liege eine D-Graduierung von A (als K-Algebra) vor. Zeige, dass durch
$$A \longrightarrow K[D] \otimes_K A,\ a_d \longmapsto T^d \otimes a_d,$$
eine K-Kooperation der Hopf-Algebra $K[D]$ auf A festgelegt wird.
(2) Es liege eine K-Kooperation
$$N\colon\ A \longrightarrow K[D] \otimes_K A$$
von $K[D]$ auf A vor. Zeige, dass durch
$$A_d \,:=\, \left\{a \in A \vert\, T^d \otimes a = N(a)\right\}$$
eine D-Graduierung auf A festgelegt wird.
(3) Zeige, dass die Zuordnungen aus (1) und (2) invers zueinander sind.

AUFGABE 18.6. Es sei K ein Körper und sei $A = K[X_1, \ldots, X_n]$. Definiere eine Hopf-Algebrastruktur auf A derart, dass zu jeder kommutativen K-Algebra L ein natürlicher Gruppenisomorphismus
$$(\text{Spek}\,(K[X_1, \ldots, X_n]))\,(L) \,\cong\, (L^n, +)$$
besteht.

Bei den beiden folgenden Aufgaben denke man an lineare Gleichungen, insbesondere daran, wie sich die Lösungen einer homogenen Gleichung zu den Lösungen einer inhomogenen Gleichung verhalten.

AUFGABE 18.7. Es sei R ein kommutativer Ring, $f_1, \ldots, f_n \in R$ und
$$A \,=\, R[T_1, \ldots, T_n]/(f_1T_1 + \ldots + f_nT_n).$$
Definiere eine Hopf-Algebrastrutur auf A (über R).

Aufgabe 18.8. Es sei R ein kommutativer Ring, $f_1, \ldots, f_n, f \in R$. Wir setzen

$$A = R[T_1, \ldots, T_n]/(f_1T_1 + \ldots + f_nT_n),$$

versehen mit der in Aufgabe 18.7 diskutierten Hopf-Algebrastruktur, und

$$B = R[T_1, \ldots, T_n]/(f_1T_1 + \ldots + f_nT_n + f).$$

Definiere eine Kooperation von A auf B (über R).

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 18.9. (3 Punkte)

Es sei K ein kommutativer Ring und $H = K[X, X^{-1}] = K[X]_X$ sei mit der in Beispiel 17.10 eingeführten (multiplikativen) K-Hopf-Algebrastruktur versehen. Zeige, dass zu einer kommutativen K-Algebra L die induzierte Gruppenstruktur auf $L^\times \cong (\operatorname{Spek}(H))(L)$ mit der Multiplikation übereinstimmt.

Aufgabe 18.10. (3 Punkte)

Es sei K ein kommutativer Ring, D eine kommutative Gruppe und $K[D]$ der zugehörige Gruppenring. Bestimme zu einer kommutativen K-Algebra L die Gruppe $(\operatorname{Spek}(K[D]))(L)$.