Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 4

Übungsaufgaben

Die beiden ersten Aufgaben sollen dazu anregen, über die Güte von Dezimalbruchentwicklungen zu diskutieren.

Aufgabe 4.1. Stimmen die beiden reellen Zahlen

$$\frac{\pi\sqrt{163}}{3} \text{ und } \ln 640320$$

überein?

Aufgabe 4.2. Stimmen die beiden reellen Zahlen

$$\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}} \text{ und } \sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$$

überein?

Aufgabe 4.3. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 5 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 4.4.*

Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $a_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen a_1, a_2, a_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Aufgabe 4.5. Sei a eine reelle Zahl. Zeige, dass die Gleichung $x^2 = a$ höchstens zwei Lösungen in $\mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 4.6. Formuliere und beweise die *Lösungsformel für eine quadratische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Aufgabe 4.7. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeige, dass die Folge genau dann gegen x konvergiert, wenn es für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $|x_n - x| \leq \frac{1}{k}$ gilt.

Aufgabe 4.8. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{n^2}$$

gegebene Folge $(n \geq 1)$ auf Konvergenz.

Aufgabe 4.9. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{10^n}$$

gegebene Folge auf Konvergenz.

Aufgabe 4.10. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente reelle Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n \to \infty} x_n \geq \lim_{n \to \infty} y_n$ gilt.

Die folgende Aussage nennt man auch das *Quetschkriterium für Folgen.*

Aufgabe 4.11. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei reelle Folgen. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Für die folgende Aufgabe können Sie bekannte Eigenschaften der Sinusfunktion verwenden.

Aufgabe 4.12.*

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}_+ .$$

Aufgabe 4.13. Beweise die Aussagen (1), (3) und (5) von Lemma 4.7.

Aufgabe 4.14. Sei $k \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Folge $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 4.15. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die Folge

$$(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert, und zwar gegen $|x|$.

In den beiden folgenden Aufgaben geht es um die Folge der Fibonacci-Zahlen.

Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* f_n ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1\,, f_2 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n\,.$$

Aufgabe 4.16. Beweise durch Induktion die *Simpson-Formel* oder Simpson-Identität für die Fibonacci-Zahlen f_n. Sie besagt $(n \geq 2)$

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n\,.$$

Aufgabe 4.17. Beweise durch Induktion die *Binet-Formel* für die Fibonacci-Zahlen. Diese besagt, dass

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

gilt $(n \geq 1)$.

Aufgabe 4.18. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

gegebene Folge $(n \geq 1)$ auf Konvergenz.

Aufgabe 4.19. Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{7n^3 - 3n^2 + 2n - 11}{13n^3 - 5n + 4}$$

definierten reellen Folge.

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 1.5 hilfreich.

Aufgabe 4.20. Zeige, dass die reelle Folge

$$\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 4.21. Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{2n + 5\sqrt{n} + 7}{-5n + 3\sqrt{n} - 4}$$

definierten reellen Folge.

Aufgabe 4.22. Man gebe Beispiele für konvergente reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, und mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ derart, dass die Folge

$$\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(1) gegen 0 konvergiert,
(2) gegen 1 konvergiert,
(3) divergiert.