Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 17

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 17.1. Berechne die ersten fünf Glieder des Cauchy-Produkts der beiden konvergenten Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Aufgabe 17.2. Man mache sich klar, dass die Partialsummen des Cauchy-Produkts von zwei Reihen nicht das Produkt der Partialsummen der beiden Reihen sind.

Aufgabe 17.3. Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ zwei absolut konvergente Potenzreihen in $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass das Cauchy-Produkt der beiden Reihen durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ mit } c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

gegeben ist.

Aufgabe 17.4. Sei $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$. Bestimme (in Abhängigkeit von x) die Summen der beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}.$$

Aufgabe 17.5. Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 in der dritten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^3.$$

Aufgabe 17.6. Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \exp x,$$

nicht nach oben beschränkt ist und dass 0 das Infimum (aber nicht das Minimum) der Bildmenge ist.[1]

Aufgabe 17.7. Zeige, dass für die Exponentialfunktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto a^x,$$

die folgenden Rechenregeln gelten (dabei seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $x, y \in \mathbb{R}$).

(1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
(2) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.
(3) $(a^x)^y = a^{xy}$.
(4) $(ab)^x = a^x b^x$.

Aufgabe 17.8. Zeige, dass die Logarithmen zur Basis b die folgenden Rechenregeln erfüllen.

(1) Es ist $\log_b(b^x) = x$ und $b^{\log_b(y)} = y$, das heißt der Logarithmus zur Basis b ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis b.
(2) Es gilt $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$
(3) Es gilt $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ für $u \in \mathbb{R}$.
(4) Es gilt

$$\log_a y \;=\; \log_a(b^{\log_b y}) \;=\; \log_b y \cdot \log_a b.$$

Aufgabe 17.9. Eine Währungsgemeinschaft habe eine Inflation von jährlich 2%. Nach welchem Zeitraum (in Jahren und Tagen) haben sich die Preise verdoppelt?

Aufgabe 17.10. Seien $b, d > 0$. Zeige

$$\lim_{b \to 0} b^d = 0\,.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.11. (3 Punkte)

Berechne die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_5$ der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, die das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe ist.

[1] Aus der Stetigkeit folgt daraus, dass $\mathbb{R}_+$ das Bild der reellen Exponentialfunktion ist.

AUFGABE 17.12. (4 Punkte)

Es sei
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen $x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5$ in der vierten Potenz
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^4 .$$

AUFGABE 17.13. (5 Punkte)

Für $N \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei
$$R_{N+1}(x) = \exp x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
das *Restglied* der Exponentialreihe. Zeige, dass für $|x| \leq 1 + \frac{1}{2}N$ die *Restgliedabschätzung*
$$|R_{N+1}(x)| \leq \frac{2}{(N+1)!}|x|^{N+1}$$
gilt.

AUFGABE 17.14. (3 Punkte)

Berechne von Hand die ersten 4 Nachkommastellen im Zehnersystem von
$$\exp 1 .$$

AUFGABE 17.15. (4 Punkte)

Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Exponentialfunktion die Eigenschaft besitzt, dass für jedes $d \in \mathbb{N}$ die Folge
$$\left(\frac{\exp n}{n^d}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$
bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.[2]

[2]Man sagt daher, dass die Exponentialfunktion *schneller wächst* als jede Polynomfunktion.

Aufgabe 17.16. (6 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion $\neq 0$, die die Gleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige, dass f eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein $b > 0$ gibt mit $f(x) = b^x$.