**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2010/2011**

# Mathematik III

## Arbeitsblatt 76

### Aufwärmaufgaben

AUFGABE 76.1. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ (u,v) \longmapsto (\frac{-u}{u^2+v^2}, \frac{-v}{u^2+v^2}),$$

ein Diffeomorphismus ist.

Auf einer Kugeloberfläche $K \subseteq \mathbb{R}^3$ nennt man einen Durchschnitt von $K$ mit einer Ebene, die durch den Kugelmittelpunkt läuft, einen *Großkreis* auf $K$. Zwei Punkte $P, Q \in K$, $P \neq Q$, heißen *antipodal*, wenn ihre Verbindungsgerade durch den Kugelmittelpunkt läuft.

AUFGABE 76.2. Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine Kugeloberfläche. Zeige, dass je zwei nicht antipodale Punkte $P, Q \in K$, $P \neq Q$, auf genau einem Großkreis von $K$ liegen.

AUFGABE 76.3. Zeige, dass ein offener Ball $U(P,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ $C^\infty$-diffeomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 76.4. (3 Punkte)

Bestimme das Bild der Großkreise durch die beiden Pole auf der Einheitssphäre unter der stereographischen Projektion vom Nordpol aus.

AUFGABE 76.5. (5 Punkte)

Zeige, dass auf der Einheitssphäre $K \subset \mathbb{R}^3$ durch folgende Zuordnung eine Metrik festgelegt wird. Für $P, Q \in K$ ist $d(P,Q)$ die Länge des (kürzeren) Verbindungsweges von $P$ nach $Q$ auf dem durch diese Punkte festgelegten Großkreis (berücksichtige auch die Fälle $P = Q$ und $P, Q$ antipodal).

Aufgabe 76.6. (8 Punkte)

Wir fixieren die beiden Punkte $N = (0,0,1)$ und $P = (1,0,0)$ auf der Einheitssphäre $K$. Es sei $G$ die Verbindungsgerade und es sei $H$ die zu $G$ senkrechte Ebene durch $N$. Führe auf $H$ einen parametrisierten Einheitskreis $E$ mit $N$ als Mittelpunkt ein. Bestimme zu $S \in E$ die Länge des (kürzeren) Weges von $N$ nach $P$ auf demjenigen Kreis, der durch den Schnitt von $K$ mit der durch $N, P$ und $S$ gegebenen Ebene festgelegt ist.

## Aufgabe zum Hochladen

Aufgabe 76.7. (6 Punkte)

Erstelle eine Animation, die die geometrischen Objekte aus Aufgabe 76.6 darstellt.