Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

9. Beispielklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	2	3	3	4	2	6	4	3	5	4	5	4	5	4	2	64
erhaltene Pkt.:																		

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Das *Urbild* zu einer Teilmenge $T \subseteq M$ unter einer Abbildung $F: L \rightarrow M$.
(2) Eine *rationale Zahl*.
(3) Eine *wachsende* Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper.
(4) Eine *stetige Fortsetzung* einer stetigen Funktion
$$f: T \longrightarrow \mathbb{K}$$
auf eine Teilmenge $\tilde{T}$, $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \mathbb{K}$.
(5) Die *Exponentialfunktion zur Basis* $b > 0$ im Komplexen.
(6) Eine *konkave* Funktion
$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
(7) Das *Oberintegral* einer nach oben beschränkten Funktion
$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
(8) Eine *ortsunabhängige* gewöhnliche Differentialgleichung
$$y' = f(t, y)\,.$$

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Satz von Bolzano-Weierstraß*.
(2) Der *Zwischenwertsatz*.
(3) Der *Satz über die lineare Approximierbarkeit* einer Funktion
$$f: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$.
(4) Die *Taylor-Formel* für eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion
$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ für einen inneren Punkt $a \in I$.

AUFGABE 3. (2 Punkte)

Eine Bahncard 25, mit der man ein Jahr lang 25 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 62 Euro und eine Bahncard 50, mit der man ein Jahr lang 50 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 255 Euro. Für welchen Jahresgesamtnormalpreis ist keine Bahncard, die Bahncard 25 oder die Bahncard 50 die günstigste Option?

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{3\,\sin^4 n\, - 7n^3 + 11n}{5n^3 - 4n^2 - \,\cos n}$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die keine Nullfolge sei. Zeige, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass entweder alle x_n, $n \geq N$, positiv oder negativ sind.

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Es sei eine Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i 10^{-i}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}$ und $|a_i| \leq 9^i$ für alle $i \in \mathbb{N}_+$ gegeben. Zeige, dass die Reihe absolut konvergiert.

Aufgabe 8. (6 Punkte)

Beweise den Zwischenwertsatz.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Es sei

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0\,,$$

ein Polynom vom Grad 2. Zeige, dass der Durchschnitt des Graphen der Funktion mit jeder Tangenten an den Graphen aus genau einem Punkt besteht.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{e^x}{x^2+1},$$

streng wachsend ist.

Aufgabe 11. (5 Punkte)

Beweise den Satz über die lineare Approximation einer Funktion

$$f\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto f(z),$$

eine Funktion, die die Funktionalgleichung

$$f(z+w) = f(z) \cdot f(w)$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$ erfülle und die in 0 differenzierbar sei. Zeige, dass dann f in jedem Punkt differenzierbar ist und die Beziehung $f'(z) = \lambda f(z)$ mit einem festen $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt.

Aufgabe 13. (5 Punkte)

Zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ sei die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$x_{n+1} = e^{x_n} - 1$$

definiert. Entscheide, für welche x_0 die Folge konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 14. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion von $\sin^3 x$.

Aufgabe 15. (5 (2+3) Punkte)

a) Es sei $k \in \mathbb{N}_+$ und es sei

$$f(x) = R(x, \sqrt[k]{x})$$

eine rationale Funktion in x und in $\sqrt[k]{x}$. Man gebe direkt (ohne Bezug auf Standardsubstitutionen der Vorlesung) eine geeignete Substitution an, mit der die Berechnung der Stammfunktion zu $f(x)$ auf die Berechnung einer

Stammfunktion einer rationalen Funktion in einer Variablen zurückgeführt werden kann.

b) Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion (mit $x > 1$)

$$\frac{\sqrt[3]{x} + x}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}}\,.$$

Aufgabe 16. (4 (1+2+1) Punkte)

a) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t}\,.$$

b) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t} + t^7\,.$$

c) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{t} + t^7 \text{ und } y(1) = 5\,.$$

Aufgabe 17. (2 Punkte)

Ordne die folgenden Funktionen den Bildern zu (man schreibe ohne Begründung hinter den Funktionsausdruck den Buchstaben des zugehörigen Bildes; nur für vollständig richtige Antworten gibt es Punkte).

(1)

$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 1\,,$$

(2)

$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 1\,,$$

(3)

$$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{3}x + 1\right) - 1\,,$$

(4)

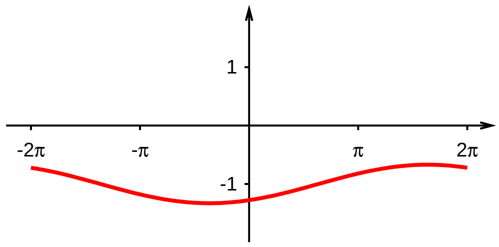
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + 1\,,$$

(5)

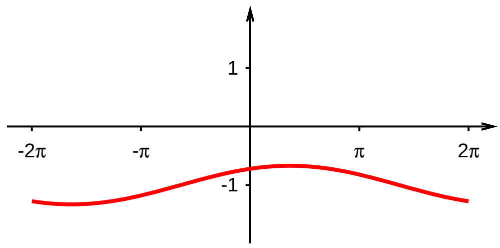
$$\frac{1}{3}\sin\left(2x + 1\right) - 1\,,$$

(6)

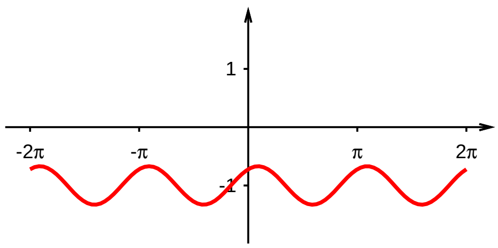
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) - 1\,.$$



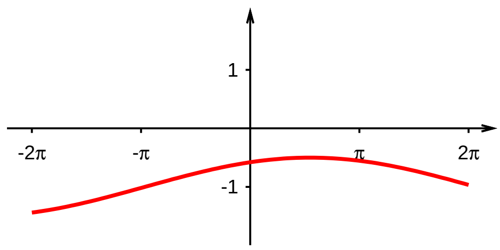
a)



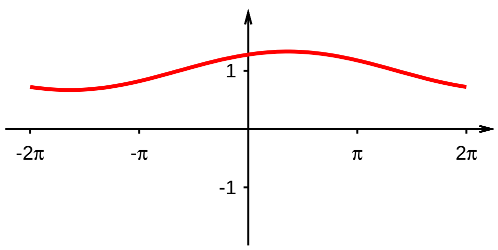
b)



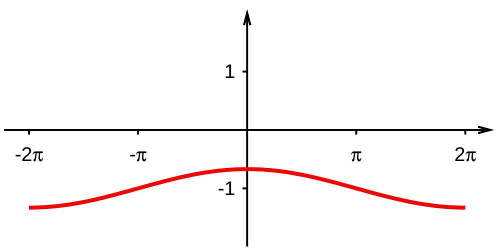
c)



d)



e)



f)