Prof. Dr. H. Brenner — Osnabrück SS 2012

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 40

Das charakteristische Polynom

Wir möchten zu einem Endomorphismus $\varphi\colon V \to V$ die Eigenwerte und dann auch die Eigenräume bestimmen. Dazu ist das charakteristische Polynom entscheidend.

Definition 40.1. Zu einer $n \times n$-Matrix M mit Einträgen in einem Körper K heißt das Polynom

$$\chi_M := \det (X \cdot E_n - M)$$

das *charakteristische Polynom*[1] von M.

Für $M = (a_{ij})_{ij}$ bedeutet dies

$$\chi_M = \det \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & X - a_{nn} \end{pmatrix} .$$

In dieser Definition nehmen wir Bezug auf die Determinante von Matrizen, die wir nur für Matrizen mit Einträgen in einem Körper definiert haben. Die Einträge sind jetzt aber Elemente im Polynomring $K[X]$. Da wir sie aber als Elemente in $K(X)$ auffassen können,[2] ist dies eine sinnvolle Definition. Gemäß der Definition ist diese Determinante ein Element in $K(X)$, da aber alle Einträge der Matrix Polynome sind und bei der rekursiven Definition der Determinante nur multipliziert und addiert wird, ist das charakteristische Polynom wirklich ein Polynom. Der Grad des charakteristischen Polynoms ist n und der Leitkoeffizient ist 1, d.h. die Gestalt ist

$$\chi_M = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \ldots + c_1X + c_0 .$$

Es gilt die wichtige Beziehung

$$\chi_M(\lambda) = \det (\lambda E_n - M)$$

für jedes $\lambda \in K$, siehe Aufgabe 40.3.

[1] Manche Autoren definieren das charakteristische Polynom als Determinante von $M - X \cdot E_n$ anstatt von $X \cdot E_n - M$. Dies ändert aber - und zwar nur bei n ungerade - nur das Vorzeichen.

[2] $K(X)$ heißt der Körper der rationalen Polynome; er besteht aus allen Brüchen P/Q zu Polynomen $P, Q \in K[X]$ mit $Q \neq 0$. Bei $K = \mathbb{R}$ kann man diesen Körper mit der Menge der rationalen Funktionen identifizieren.

Für eine lineare Abbildung
$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
auf einem endlichdimensionalen Vektorraum definiert man das *charakteristische Polynom*
$$\chi_\varphi := \chi_M\,,$$
wobei M eine beschreibende Matrix bezüglich einer beliebigen Basis sei. Der Determinantenmultiplikationssatz zeigt, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Basis ist.

SATZ 40.2. *Es sei K ein Körper und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei*
$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung. Dann ist $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von φ, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_φ ist.

Beweis. Es sei M eine beschreibende Matrix für φ, und sei $\lambda \in K$ vorgegeben. Es ist
$$\chi_M\,(\lambda) = \det\,(\lambda E_n - M) = 0$$
genau dann, wenn die lineare Abbildung
$$\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi$$
nicht bijektiv (und nicht injektiv) ist (wegen Satz 11.11 und Lemma 10.6). Dies ist nach Lemma 9.12 äquivalent zu
$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) = \operatorname{kern}\,(\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi) \neq 0\,,$$
was bedeutet, dass der Eigenraum zu λ nicht der Nullraum ist, also λ ein Eigenwert zu φ ist. □

BEISPIEL 40.3. Wir betrachten die reelle Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom ist
$$\begin{aligned} \chi_M &= \det\,(xE_2 - M) \\ &= \det\left(x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} x & -5 \\ -1 & x \end{pmatrix} \\ &= x^2 - 5. \end{aligned}$$
Die Eigenwerte sind also $x = \pm\sqrt{5}$ (diese Eigenwerte haben wir auch in Beispiel 39.9 ohne charakteristisches Polynom gefunden).

BEISPIEL 40.4. Zur Matrix
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom gleich

$$\chi_M \;=\; \det \begin{pmatrix} X-2 & -5 \\ 3 & X-4 \end{pmatrix} \;=\; (X-2)(X-4)+15 \;=\; X^2-6X+23.$$

Die Nullstellenbestimmung dieses Polynoms führt zur Bedingung

$$(X-3)^2 = -23+9 = -14\,,$$

die über $\mathbb{R}$ nicht erfüllbar ist, sodass die Matrix über $\mathbb{R}$ keine Eigenwerte besitzt. Über $\mathbb{C}$ hingegegen gibt es die beiden Eigenwerte $3+\sqrt{14}i$ und $3-\sqrt{14}i$. Für den Eigenraum zu $3+\sqrt{14}i$ muss man

$$\begin{aligned} \operatorname{Eig}_{3+\sqrt{14}i}(M) \;&=\; \operatorname{kern}\left(\left(3+\sqrt{14}i\right)E_2 - M\right) \\ &=\; \operatorname{kern}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{14}i & -5 \\ 3 & -1+\sqrt{14}i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bestimmen, ein Basisvektor (also ein Eigenvektor) davon ist $\begin{pmatrix} 5 \\ 1+\sqrt{14}i \end{pmatrix}$. Analog ist

$$\operatorname{Eig}_{3-\sqrt{14}i}(M) \;=\; \operatorname{kern}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{14}i & -5 \\ 3 & -1-\sqrt{14}i \end{pmatrix} \;=\; \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1-\sqrt{14}i \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Beispiel 40.5. Für eine obere Dreiecksmatrix

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom nach Lemma 11.8 gleich

$$\chi_M \;=\; (X-d_1)(X-d_2)\cdots(X-d_n).$$

In diesem Fall liegt das charakteristische Polynom direkt in der Zerlegung in lineare Faktoren vor, sodass unmittelbar seine Nullstellen und damit die Eigenwerte von M ablesbar sind, nämlich $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (die nicht alle verschieden sein müssen).

Vielfachheiten

Für eine genauere Untersuchung der Eigenräume ist die folgende Begrifflichkeit sinnvoll. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Man nennt dann den Exponenten des linearen Polynoms $X-\lambda$ im charakteristischen Polynom χ_φ die *algebraische*

Vielfachheit von λ, die wir mit $\mu_\lambda := \mu_\lambda(\varphi)$ bezeichnen, und die Dimension des zugehörigen Eigenraumes, also

$$\dim\left(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)\right)$$

die *geometrische Vielfachheit* von λ. Der vorstehende Satz besagt also, dass die eine Vielfachheit genau dann positiv ist, wenn dies für die andere gilt. Im Allgemeinen können die beiden Vielfachheiten aber verschieden sein, wobei eine Abschätzung immer gilt.

Lemma 40.6. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Dann besteht zwischen der geometrischen und der algebraischen Vielfachheit die Beziehung

$$\dim\left(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)\right) \leq \mu_\lambda(\varphi)\,.$$

Beweis. Sei $m = \dim\left(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)\right)$ und sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von diesem Eigenraum, die wir durch $w_1, \ldots, w_{n-m}$ zu einer Basis von V ergänzen. Bezüglich dieser Basis hat die beschreibende Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist daher $(X-\lambda)^m \cdot \chi_C$, sodass die algebraische Vielfachheit mindestens m ist. ☐

Beispiel 40.7. Wir betrachten 2×2-*Scherungsmatrizen*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a \in K$. Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_M \,=\, (X-1)(X-1),$$

sodass 1 der einzige Eigenwert von M ist. Den Eigenraum berechnet man als

$$\operatorname{Eig}_1(M) \,=\, \operatorname{kern} \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} -as \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor ist, und dass bei $a \neq 0$ der Eigenraum eindimensional ist (bei $a = 0$ liegt die Identität vor und der Eigenraum ist zweidimensional). Bei $a \neq 0$ ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 1 gleich 2, die geometrische Vielfachheit gleich 1.

Diagonalisierbarkeit

Die Einschränkung einer linearen Abbildung auf einen Eigenraum ist die Streckung um den zugehörigen Eigenwert, also eine besonders einfache lineare Abbildung. Viele Eigenwerte mit hochdimensionalen Eigenräumen korrespondieren zu strukturell einfachen linearen Abbildungen. Ein Extremfall liegt bei den sogenannten diagonalisierbaren Abbildungen vor.

Bei einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom einfach gleich

$$(X - d_1)(X - d_2) \cdots (X - d_n) .$$

Wenn die Zahl d in den Diagonalelementen k-mal vorkommt, so kommt auch der Linearfaktor $X - d$ mit dem Exponenten k in der Faktorisierung des charakteristischen Polynoms vor. Dies gilt auch, wenn nur eine obere Dreiecksmatrix vorliegt. Anders aber als bei einer oberen Dreiecksmatrix kann man bei einer Diagonalmatrix sofort die Eigenräume angeben, siehe Beispiel 39.7, und zwar besteht der Eigenraum zu d aus allen Linearkombinationen der Standardvektoren e_i, für die d_i gleich d ist. Insbesondere ist die Dimension des Eigenraums gleich der Anzahl, wie oft d als Diagonalelement auftritt. Bei einer Diagonalmatrix stimmen also algebraische und geometrische Vielfachheiten überein.

Definition 40.8. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt φ *diagonalisierbar*, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren zu φ besitzt.

Satz 40.9. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist diagonalisierbar.*
(2) *Es gibt eine Basis $\mathfrak{v}$ von V derart, dass die beschreibende Matrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist.*
(3) *Für jede beschreibende Matrix $M = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{w}}(\varphi)$ bezüglich einer Basis $\mathfrak{w}$ gibt es eine invertierbare Matrix B derart, dass*

$$BMB^{-1}$$

eine Diagonalmatrix ist.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt aus der Definition, aus Beispiel 39.7 und der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen. Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt aus Korollar 10.5. □

KOROLLAR 40.10. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung, die $n = \dim(V)$ verschiedene Eigenwerte besitze. Dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis. Aufgrund von Lemma 39.14 gibt es n linear unabhängige Eigenvektoren. Diese bilden nach Korollar 8.9 eine Basis. □

BEISPIEL 40.11. Wir schließen an Beispiel 39.9 an. Es gibt die zwei Eigenvektoren $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ zu den verschiedenen Eigenwerten $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$, so dass die Abbildung nach Korollar 40.10 diagonalisierbar ist. Bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$ aus diesen Eigenvektoren wird die lineare Abbildung durch die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

beschrieben.

Die Übergangsmatrix von der Basis $\mathfrak{u}$ zur durch e_1 und e_2 gegebenen Standardbasis $\mathfrak{v}$ ist einfach

$$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix dazu ist

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Gemäß Korollar 10.5 besteht die Beziehung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$