Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

26. Mai 2012

Mathematik für Anwender I

Klausur mit Lösungen

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Ich erkläre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	2	4	2	4	5	4	6	3	6	3	4	3	5	5	64
erhaltene Pkt.:																	

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *Abbildung*
$$F : M \longrightarrow N$$
zwischen zwei Mengen M und N.
(2) Ein *Erzeugendensystem* $v_1, \ldots, v_n$ eines K-Vektorraumes V.
(3) Eine *lineare* Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
(4) Eine *invertierbare* $n \times n$-Matrix über einem Körper K.
(5) Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x.
(6) Die *geometrische Reihe* für $x \in \mathbb{R}$.
(7) Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
(8) Eine *Riemann-integrierbare* Funktion
$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Lösung

(1) Eine *Abbildung* F von M nach N ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge M genau ein Element der Menge N zugeordnet wird.
(2) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ bilden ein *Erzeugendensystem* von V, wenn man jeden Vektor $v \in V$ als Linearkombination der v_i darstellen kann.
(3) Eine Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.
   (a) $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.
   (b) $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in V$.
(4) Die Matrix M heißt *invertierbar*, wenn es eine weitere Matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ gibt mit
$$A \circ M = E_n = M \circ A\,.$$
(5) Die Folge *konvergiert* gegen x, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist: Zu jedem positiven $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung
$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(6) Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

heißt die *geometrische Reihe* in x.

(7) Die Funktion f heißt *differenzierbar* in a, wenn der Limes

$$\lim_{x\in\mathbb{R}\setminus\{a\},\, x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existiert.

(8) Die Funktion f heißt *Riemann-integrierbar*, wenn Ober- und Unterintegral von f existieren und übereinstimmen.

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Die *Dimensionsformel* für lineare Abbildungen.
(2) Das *Quotientenkriterium* für eine Reihe.
(3) Der *Zwischenwertsatz* für stetige Funktionen.
(4) Der *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung*.

Lösung

(1) Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
eine K-lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann gilt
$$\dim (V) = \dim (\text{kern } \varphi) + \dim (\text{bild } \varphi) \ .$$
(2) Es sei
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$
eine Reihe von reellen Zahlen. Es gebe eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ und ein k_0 mit
$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q$$
für alle $k \geq k_0$ (insbesondere sei $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$). Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.
(3) Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$.
(4) Sei I ein reelles Intervall und sei
$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei
$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$
die zugehörige Integralfunktion. Dann ist F differenzierbar und es gilt
$$F'(x) = f(x)$$
für alle $x \in I$.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Zwei Fahrradfahrer, A und B, fahren auf ihren Fahrrädern eine Straße entlang. Fahrer A macht pro Minute 40 Pedalumdrehungen, hat eine Übersetzung von Pedal zu Hinterrad von 1 zu 6 und Reifen mit einem Radius von 39 Zentimetern. Fahrer B braucht für eine Pedaldrehung 2 Sekunden, hat eine Übersetzung von 1 zu 7 und Reifen mit einem Radius von 45 Zentimetern.

Wer fährt schneller?

Lösung

Wir vergleichen die Strecken, die die beiden Fahrer pro Minute zurücklegen. Für Fahrer A ist dies (in Zentimetern)

$$s_A = 40 \cdot 6 \cdot 39 \cdot 2\pi\,,$$

für Fahrer B, der 30 Pedalumdrehungen pro Minute macht, ist dies

$$s_B = 30 \cdot 7 \cdot 45 \cdot 2\pi\,.$$

Der Quotient ist

$$\frac{s_A}{s_B} = \frac{40 \cdot 6 \cdot 39 \cdot 2\pi}{30 \cdot 7 \cdot 45 \cdot 2\pi} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 39}{3 \cdot 7 \cdot 45} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 13}{7 \cdot 15} = \frac{104}{105}.$$

Also fährt B schneller als A.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Zeige, dass für jede ungerade Zahl n die Zahl $25n^2 - 17$ ein Vielfaches von 8 ist.

Lösung

Eine ungerade Zahl n besitzt die Form $n = 2k + 1$ mit einer ganzen Zahl k. Somit ist

$$\begin{aligned} 25n^2 - 17 &= 25(2k+1)^2 - 17 \\ &= 25(4k^2 + 4k + 1) - 17 \\ &= 25 \cdot 4 \cdot k(k+1) + 25 - 17 \\ &= 25 \cdot 4 \cdot k(k+1) + 8. \end{aligned}$$

Die 8 hinten ist ein Vielfaches von 8. Genau eine der beiden Zahlen k und $k+1$ ist gerade, also von der Form $2m$. Daher ist $4 \cdot k(k+1)$ ein Vielfaches von 8 und somit ist die gesamte Zahl ein Vielfaches von 8.

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Löse die lineare Gleichung

$$(2+5i)z \;=\; (3-7i)$$

über $\mathbb{C}$ und berechne den Betrag der Lösung.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} z &= (3-7i)(2+5i)^{-1} \\ &= (3-7i)\frac{(2-5i)}{29} \\ &= \frac{6-35-14i-15i}{29} \\ &= \frac{-29-29i}{29} \\ &= -1-i. \end{aligned}$$

Der Betrag ist

$$|-1-i| \;=\; \sqrt{2}.$$

Aufgabe 6. (4 (2+2) Punkte)
Es seien die beiden Polynome

$$P = X^2 + 3X - 5 \text{ und } Q = X^2 - 4X + 7$$

gegeben.

a) Berechne $P(Q)$ (es soll also Q in P eingesetzt werden).

b) Berechne die Ableitung von $P(Q)$ direkt und mit Hilfe der Kettenregel.

Lösung

a) Es ist

$$\begin{aligned} P(Q) &= (X^2 - 4X + 7)^2 + 3(X^2 - 4X + 7) - 5 \\ &= X^4 + 16X^2 + 49 - 8X^3 + 14X^2 - 56X + 3X^2 - 12X + 21 - 5 \\ &= X^4 - 8X^3 + 33X^2 - 68X + 65. \end{aligned}$$

b) Die Ableitung von $P(Q)$ ist

$$(X^4 - 8X^3 + 33X^2 - 68X + 65)' = 4X^3 - 24X^2 + 66X - 68.$$

Es ist $P' = 2X + 3$ und

$$P'(Q) = 2(X^2 - 4X + 7) + 3 = 2X^2 - 8X + 17.$$

Nach der Kettenregel ist daher

$$\begin{aligned} (P(Q))' &= P'(Q) \cdot Q' \\ &= (2X^2 - 8X + 17)(2X - 4) \\ &= 4X^3 - 8X^2 - 16X^2 + 32X + 34X - 68 \\ &= 4X^3 - 24X^2 + 66X - 68. \end{aligned}$$

Aufgabe 7. (5 Punkte)

Es seien

$$g_1, g_2, \ldots, g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

differenzierbare Funktionen. Beweise durch Induktion über n die Beziehung

$$\left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n}\right)' = \frac{-1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \ldots + \frac{g_n'}{g_n}\right).$$

Lösung

Für $n = 1$ ist nach der Kettenregel

$$\left(\frac{1}{g_1}\right)' = -\frac{g_1'}{g_1^2} = -\frac{1}{g_1} \cdot \frac{g_1'}{g_1}.$$

Zum Induktionsschluss sei die Aussage für n Funktionen schon bewiesen, und seien $n+1$ Funktionen gegeben. Dann ist aufgrund der Produktregel und der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n \cdot g_{n+1}}\right)' \\
= & \left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \frac{1}{g_{n+1}}\right)' \\
= & \left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n}\right)' \cdot \frac{1}{g_{n+1}} + \frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(\frac{1}{g_{n+1}}\right)' \\
= & -\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \ldots + \frac{g_n'}{g_n}\right) \cdot \frac{1}{g_{n+1}} + \frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(-\frac{1}{g_{n+1}} \cdot \frac{g_{n+1}'}{g_{n+1}}\right) \\
= & -\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n \cdot g_{n+1}} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \ldots + \frac{g_n'}{g_n}\right) - \frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n \cdot g_{n+1}} \cdot \frac{g_{n+1}'}{g_{n+1}} \\
= & -\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n \cdot g_{n+1}} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \ldots + \frac{g_n'}{g_n} + \frac{g_{n+1}'}{g_{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 & -6 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9. (6 Punkte)

Es sei W ein n-dimensionaler K-Vektorraum (K ein Körper) und seien $U, V \subseteq W$ Untervektorräume der Dimension $\dim(U) = r$ und $\dim(V) = s$. Es gelte $r + s > n$. Zeige, dass $U \cap V \neq 0$ ist.

Lösung

Es sei $u_1, \ldots, u_r$ eine Basis von U und $v_1, \ldots, v_s$ eine Basis von V. Wir betrachten die Familie der Vektoren

$$u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s \,.$$

Wegen $r + s > n$ kann diese Familie nicht linear unabhängig sein, da es sonst einen $(r + s)$-dimensionalen Untervektorraum von W geben würde. Also gibt es Koeffizienten $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$, die nicht alle 0 sind, mit

$$a_1u_1 + \ldots + a_ru_r = b_1v_1 + \ldots + b_sv_s \,.$$

Dieser Vektor gehört zu $U \cap V$. Er ist nicht 0, da andernfalls beidseitig alle Koeffizienten 0 sein müssten.

Aufgabe 10. (3 Punkte)
Berechne die Summe
$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n .$$

Lösung

Mit der Formel für die geometrische Reihe ist
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{5-2} = \frac{5}{3}.$$
Ferner ist
$$\sum_{n=0}^{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{25+10+4}{25} = \frac{39}{25}.$$
Also ist insgesamt
$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{5}{3} - \frac{39}{25} = \frac{125-117}{75} = \frac{8}{75}.$$

AUFGABE 11. (6 Punkte)

Beweise das Quotientenkriterium für Reihen.

Lösung

Die Konvergenz ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder ändert. Daher können wir $k_0 = 0$ annehmen. Ferner können wir annehmen, dass alle a_k nichtnegative reelle Zahlen sind. Es ist

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 \leq a_0 \cdot q^k.$$

Somit folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe.

Aufgabe 12. (3 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto x^3-3x+1.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall $[0,1]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von f liegen muss.

Lösung

Wegen $f(0)=1$ und $f(1)=-1$ muss nach dem Zwischenwertsatz im Intervall $[0,1]$ eine Nullstelle von f liegen.

Die Intervallmitte ist $\frac{1}{2}$, dort hat f den Wert

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\left(\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1-12+8}{8}=-\frac{3}{8}.$$

Dies ist negativ, also muss eine Nullstelle im Intervall $[0,\frac{1}{2}]$ liegen.

Die Intervallmitte von diesem Intervall ist $\frac{1}{4}$, dort hat f den Wert

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^3-3\left(\frac{1}{4}\right)+1=\frac{1-48+64}{64}=\frac{17}{64}.$$

Dies ist positiv, also muss eine Nullstelle im Intervall $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ liegen.

Die Intervallmitte von diesem Intervall ist $\frac{3}{8}$, dort hat f den Wert

$$f\left(\frac{3}{8}\right)=\left(\frac{3}{8}\right)^3-3\left(\frac{3}{8}\right)+1=\frac{27-576+512}{512}=-\frac{37}{512}.$$

Dies ist negativ, also muss eine Nullstelle im Intervall $[\frac{1}{4},\frac{3}{8}]=[\frac{2}{8},\frac{3}{8}]$ liegen. Die Länge dieses Intervalls ist $\frac{1}{8}$.

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $f(x) = x + \sin x$ streng wachsend ist.

Lösung

Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 1 + \cos x\,.$$

Wegen

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

ist $f'(x) \geq 0$, und da der Kosinus nur bei reellen Zahlen der Form $\pi + n2\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) den Wert -1 besitzt, besitzt f' nur dort eine Nullstelle. Nach Satz 20.7 (2) (angewendet auf ein beliebiges beschränktes Teilintervall) ist die Funktion streng wachsend.

Aufgabe 14. (3 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die beiden Graphen zu $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ eingeschlossen wird.

Lösung

Für x zwischen 0 und 1 ist $0 \leq x^2 \leq x \leq \sqrt{x} \leq 1$ und für $x \geq 1$ ist $x^2 \geq \sqrt{x}$. Die eingeschlossene Fläche liegt also innerhalb des Einheitsquadrates. Daher ist der Flächeninhalt gleich dem bestimmten Integral der Wurzelfunktion von 0 bis 1 minus dem bestimmten Integral (in den gleichen Grenzen) zur Parabel. Daher ist der Flächeninhalt gleich

$$A = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}|_0^1 - \frac{1}{3}x^3|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

AUFGABE 15. (5 Punkte)
Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x-2)}$$

für $x > 2$.

Lösung

Wir machen den Ansatz für die Partialbruchzerlegung, also

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x-2}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner führt auf

$$\begin{aligned} x^2+1 &= \alpha(x-1)(x-2) + \beta x(x-2) + \gamma x(x-1) \\ &= \alpha(x^2-3x+2) + \beta(x^2-2x) + \gamma(x^2-x) \\ &= x^2(\alpha+\beta+\gamma) + x(-3\alpha-2\beta-\gamma) + 2\alpha. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\alpha+\beta+\gamma = 1,$$

$$-3\alpha-2\beta-\gamma = 0,$$

und

$$2\alpha = 1.$$

Addition der ersten beiden Gleichungen ergibt

$$-2\alpha-\beta = 1.$$

Also ist $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\beta = -2\alpha-1 = -2$$

und

$$\gamma = 1-\alpha-\beta = \frac{5}{2}.$$

Somit ist

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - 2\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x-2}$$

und eine Stammfunktion ist

$$\frac{1}{2}\cdot \ln x - 2\cdot \ln(x-1) + \frac{5}{2}\cdot \ln(x-2).$$

Aufgabe 16. (5 (4+1) Punkte)

a) Finde alle Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{\sin\, t}{\cos\, t} y + (t^2 - 3) \cos\, t$$

für $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

b) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{\sin\, t}{\cos\, t} y + (t^2 - 3) \cos\, t \;\text{ mit }\; y(0) = 7\,.$$

Lösung

a) Wir berechnen zuerst die Lösungen der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{\sin\, t}{\cos\, t} y\,.$$

Eine Stammfunktion zu $g(t) = -\frac{\sin\, t}{\cos\, t}$ ist $G(t) = \ln\,(\cos\, t\,)$. Daher sind (mit $c \in \mathbb{R}$)

$$c \cdot e^{\ln(\cos\, t\,)} \;=\; c \cdot\, \cos\, t$$

die Lösungen der homogenen Gleichung.

Zur Bestimmung einer Lösung der inhomogenen Gleichung müssen wir eine Stammfunktion zu

$$(t^2 - 3) \cdot \cos\, t \cdot (\,\cos\, t\,)^{-1} = t^2 - 3$$

bestimmen. Eine solche ist $\frac{1}{3}t^3 - 3t$. Somit sind die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung gleich

$$\left(\frac{1}{3}t^3 - 3t\right)\;\cos\, t\; + c \cdot\, \cos\, t\,, c \in \mathbb{R}.$$

b) Zur Lösung des Anfangswertproblems müssen wir das c aus Teil a) bestimmen. Die Anfangsbedingung führt auf

$$c\,\cos\, 0 \;=\; 7,$$

also ist $c = 7$ und

$$\left(\frac{1}{3}t^3 - 3t\right)\;\cos\, t\; + 7 \cdot\, \cos\, t$$

ist die Lösung des Anfangswertproblems.