Dr. A. Kaid **Osnabrück SS 2010**

Wiederholertutorium Mathematik I

Aufgabenblatt 12

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 12.1. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \operatorname{End}(V)$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Die lineare Abbildung φ ist ein Isomorphismus.
(2) 0 ist kein Eigenwert von φ.
(3) Der konstante Term des charakteristischen Polynoms χ_φ ist $\neq 0$.

Aufgabe 12.2. Betrachte die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Untersuche ob A diagonalisierbar ist in Abhängigkeit von $\mathbb{K}$ (d.h., $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Falls ja, so gebe eine invertierbare Matrix C und eine Diagonalmatrix D mit $D = C^{-1}AC$ an.

Aufgabe 12.3. Untersuche, welche der folgenden Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bilinear sind. Wenn ja, so untersuche die jeweilige Abbildung auch auf die Eigenschaften alternierend und symmetrisch.

(1) $\varphi(x, y) := x_1y_1$.
(2) $\varphi(x, y) := x_1x_2 + y_1y_2$.
(3) $\varphi(x, y) := 2x_1y_2 + 3x_2y_1$.

Aufgabe 12.4. Betrachte im $\mathbb{R}^2$ die Bilinearform $\varphi(x, y) := x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$.

(1) Zeige, dass $\mathbb{R}^2$ bezüglich φ ein euklidischer Vektorraum ist.
(2) Berechne die Länge $||\,(4, -2)\,||$ bezüglich φ.

Aufgabe 12.5. Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Zeige die folgenden Aussagen:

(1) $||\,x\,|| = ||\,y\,|| \Leftrightarrow \langle x + y, x - y \rangle = 0$.
(2) $||\,x + y\,||^2 = ||\,x\,||^2 + ||\,y\,||^2 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$.

Hausaufgaben (Korrektur nur für Leute ohne Klausurberechtigung)

Aufgabe 12.6. (4 Punkte)

Untersuche, welche der folgenden Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bilinear sind. Wenn ja, so untersuche die jeweilige Abbildung auch auf die Eigenschaften alternierend und symmetrisch.

(1) $\varphi(x, y) := x_1 - y_1$.
(2) $\varphi(x, y) : x_1 y_1 - x_2 y_2$.
(3) $\varphi(x, y) := 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1$.

Aufgabe 12.7. (4 Punkte)

Es sei $V = \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Zeige, dass V versehen mit der Abbildung

$$\langle -, - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},\ (A, B) \longmapsto \mathrm{Spur}(B^t A)$$

ein euklidischer Vektorraum ist.