Algebraische Kurven - Vorlesung 30

Der Satz von Bezout

Wir werden in dieser Vorlesung den Satz von Bezout für die projektive Ebene beweisen, das ist die Aussage, dass für zwei projektive Kurven in der projektiven Ebene ohne gemeinsame Komponente vom Grad m und n die Summe über alle Schnittmultiplizitäten gleich mn ist. Unsere Darstellung folgt weitgehend dem Aufbau in Fulton.

Lemma 1. *Sei K ein Körper und seien $F, G \in K[X,Y,Z] = P$ zwei homogene Polynome vom Grad m und n ohne gemeinsamen nichtkonstanten Teiler. Dann ist*

$$\dim_K(P/(F,G))_\ell = mn \text{ für } \ell \text{ hinreichend groß}.$$

Beweis. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{(G,-F)} P \times P \xrightarrow{(F,G)} P \longrightarrow P/(F,G) \longrightarrow 0\,.$$

Dabei steht vorne die Abbildung $H \mapsto (GH, -FH)$, dann folgt die Abbildung $(A,B) \mapsto (AF + BG)$ und schließlich die Restklassenbildung. All diese Abbildungen sind P-Modul Homomorphismen. Die Injektivität vorne ist klar, da P ein Integritätsbereich ist. Die Exaktheit an den beiden hinteren Stellen ist klar, bleibt noch die Exaktheit an der zweiten Stelle zu zeigen. Dort ist klar, dass die Verknüpfung die Nullabbildung ist. Sei also $AF + BG = 0$ in P. Da P faktoriell ist und da F und G teilerfremd sind folgt aber, dass A ein Vielfaches von G sein muss. Dann kann man durch G teilen und erhält, dass B ein Vielfaches von F sein muss (mit dem gleichen Faktor). Also kommt (A,B) von links.

Da F und G homogen sind mit fixierten Graden, kann man diese Sequenz einschränken auf homogene Stufen, und zwar ergibt sich dabei die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow P_{\ell-m-n} \xrightarrow{(G,-F)} P_{\ell-m} \times P_{\ell-n} \xrightarrow{(F,G)} P_\ell \longrightarrow (P/(F,G))_\ell \longrightarrow 0$$

(dabei sind die Stufen für negativen Index null). Die Exaktheit bleibt erhalten, da bei einem homogenen Homomorphismus die Stufen unabhängig voneinander sind. Alle beteiligten Stufen sind nun endlichdimensionale Vektorräume. Für $\ell \geq m + n$ sind alle Indizes nichtnegativ und daher gilt

$\dim(P_\ell) = \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}$. Wegen der Additivität der Dimension bei exakten Sequenzen ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\dim((P/(F,G)_\ell)) \\
&= \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2} - \frac{(\ell-m+1)(\ell-m+2)}{2} - \frac{(\ell-n+1)(\ell-n+2)}{2} \\
&\quad + \frac{(\ell-m-n+1)(\ell-m-n+2)}{2} \\
&= \frac{2-(-m+1)(-m+2)-(-n+1)(-n+2)+(-m-n+1)(-m-n+2)}{2} \\
&= \frac{2mn}{2} \\
&= mn\,.
\end{aligned}$$

□

Lemma 2. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $F, G \in K[X,Y,Z]$ homogene Polynome ohne gemeinsame (projektive) Nullstelle auf $V_+(Z) \subset \mathbb{P}^2_K$. Es sei $R = K[X,Y,Z]/(F,G)$ der zugehörige Restklassenring. Dann ist die Abbildung*

$$R \longrightarrow R,\ H \longmapsto ZH\,,$$

injektiv.

Beweis. Sei $H \in K[X,Y,Z]$ und vorausgesetzt, das H unter der angegebenen Abbildung auf null geht. Das bedeutet, dass eine Gleichung

$$ZH = LF + MG$$

mit $L, M \in K[X,Y,Z]$ vorliegt. Wir ersetzen in dieser Gleichung die Variable Z durch 0 und erhalten die Gleichung

$$0 = L(X,Y,0)F(X,Y,0) + M(X,Y,0)G(X,Y,0)$$

in $K[X,Y]$. Nach der Voraussetzung, dass es keine gemeinsame projektive Nullstelle auf $V_+(Z)$ gibt, sind $F(X,Y,0)$ und $G(X,Y,0)$ (als homogene Polynome) teilerfremd. Das bedeutet, dass es ein Polynom $Q \in K[X,Y]$ mit

$$L(X,Y,0) = QG(X,Y,0) \text{ und } M(X,Y,0) = -QF(X,Y,0)\,.$$

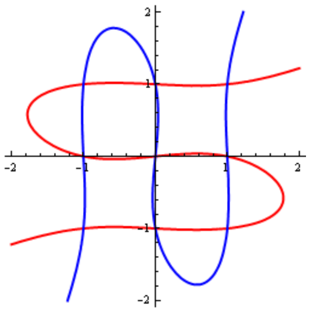
Dies wiederum heißt zurückübersetzt nach $K[X,Y,Z]$, dass dort

$$L = QG(X,Y,0) + Z\tilde{L} \text{ und } M = -QF(X,Y,0) + Z\tilde{M}$$

gilt. Mit $F = F(X, Y, 0) + Z\tilde{F}$ und $G = G(X, Y, 0) + Z\tilde{G}$ ergibt sich aus der Ausgangsgleichung

$$\begin{aligned} ZH &= LF + MG \\ &= (QG(X, Y, 0) + Z\tilde{L})F + (-QF(X, Y, 0) + Z\tilde{M})G \\ &= Q(G - Z\tilde{G})F - Q(F - Z\tilde{F})G + Z\tilde{L}F + +Z\tilde{M}G \\ &= -QZ\tilde{G}F + QZ\tilde{F}G + Z\tilde{L}F + Z\tilde{M}G \\ &= Z(-Q\tilde{G}F + Q\tilde{F}G + \tilde{L}F + \tilde{M}G)\,. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung können wir Z herauskürzen und erhalten eine Darstellung für H als Linearkombination aus F und G. Damit ist die Restklasse von H in R ebenfalls 0. $\square$



Satz 3. *(Satz von Bezout)*

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $F, G \in K[X, Y, Z]$ zwei homogene Polynome vom Grad m und n ohne gemeinsame Komponente mit zugehörigen Kurven $C = V_+(F), D = V_+(G) \subset \mathbb{P}^2_K$. Dann gilt

$$\sum_P \operatorname{mult}_P(C, D) = mn\,.$$

Beweis. Der Durchschnitt $C \cap D$ besteht nur aus endlich vielen Punkten. Wir können daher annehmen, dass alle Schnittpunkte in $\mathbb{A}^2_K = D_+(Z) \subset \mathbb{P}^2_K$ liegen. Es seien $\tilde{F}$ und $\tilde{G}$ die inhomogenen Polynome aus $K[X, Y]$, die die affinen Kurven $C \cap \mathbb{A}^2_K$ und $D \cap \mathbb{A}^2_K$ beschreiben. Damit ist

$$\begin{aligned} \sum_{P \in \mathbb{P}^2_K} \operatorname{mult}_P(F, G) &= \sum_{P \in \mathbb{A}^2_K} \operatorname{mult}_P(\tilde{F}, \tilde{G}) \\ &= \sum_{P \in \mathbb{A}^2_K} \dim_K \left(K[X, Y]_{\mathfrak{m}_P} / (\tilde{F}, \tilde{G}) \right) \\ &= \dim_K \left(K[X, Y] / (\tilde{F}, \tilde{G}) \right). \end{aligned}$$

Dabei beruht die letzte Gleichung auf Satz 26.11. Wie wollen die Dimension dieses inhomogenen Restklassenrings mit der Dimension einer Stufe des homogenen Restklassenrings $(K[X, Y, Z](F, G))_\ell$ in Verbindung bringen. Von letzterer wissen wir aufgrund von Lemma 30.1, dass sie für ℓ hinreichend groß gleich mn ist.

Wir wählen eine Basis $V_1, \ldots, V_{mn}$ von $(K[X,Y,Z]/(F,G))_\ell$ (ℓ hinreichend groß und fixiert) und behaupten, dass die Dehomogenisierungen $v_i = V_i(X,Y,1)$ eine Basis von $K[X,Y]/(\tilde{F},\tilde{G})$ bilden. Dazu sei $q \in K[X,Y]$ beliebig vorgegeben mit Homogenisierung $Q \in K[X,Y,Z]$ vom Grad d. Sei e so gewählt, dass $d+e \geq \ell$ ist. Aufgrund von Lemma 30.2 sind die Abbildungen

$$(K[X,Y,Z]/(F,G))_\ell \longrightarrow (K[X,Y,Z]/(F,G))_{\ell+\lambda},\; Q \longmapsto Z^\lambda Q\,,$$

injektiv und daher auch bijektiv, da die Dimensionen übereinstimmen. Es gibt dann also eine Darstellung $Z^e Q = \sum_{i=1}^{mn} a_i Z^{d+e-\ell} V_i$. Durch Dehomogenisieren ergibt sich daraus sofort eine Darstellung für q.

Für die lineare Unabhängigkeit sei $\sum_{i=1}^{mn} a_i v_i$ angenommen, so dass in $K[X,Y]$ eine Gleichung $\sum_{i=1}^{mn} a_i v_i = \tilde{A}\tilde{F} + \tilde{B}\tilde{G}$ vorliegt. Dabei setzen wir $\tilde{A}, \tilde{B}$ als Dehomogenisierung von zwei homogenen Polynomen $A, B \in K[X,Y,Z]$ an, so dass zwei Ausdrücke vorliegen – nämlich $\sum_{i=1}^{mn} a_i V_i$ und $AF + BG$ –, deren Dehomogenisierungen übereinstimmen. Die ursprünglichen homogenen Polynome kann man aber aus der Dehomogenisierung rekonstruieren, in dem man homogenisiert und mit einer Potenz von Z multipliziert. Aus der Gleichung erhält man also durch Homogenisierung (wobei der höchste Grad ausschlaggebend ist) eine Gleichung der Form

$$\sum_{i=1}^{mn} a_i Z^r V_i = Z^s AF + Z^t BG\,,$$

in der alle Summanden den gleichen Grad besitzen. Dabei kommt links nur eine Potenz von Z vor, da die V_i homogen vom gleichen Grad sind. Diese Gleichung bedeutet $\sum_{i=1}^{mn} a_i Z^r V_i$ in $K[X,Y,Z]/(F,G)$, woraus sich $a_i = 0$ ergibt. □

Korollar 4. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $C, D \subset \mathbb{P}^2_K$ zwei ebene projektive Kurven. Dann ist der Durchschnitt $C \cap D$ nicht leer.*

Beweis. Die Aussage stimmt, wenn C und D eine gemeinsame Komponente besitzen. Andernfalls folgt sie aus Satz 30.3. □

Korollar 5. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $F, G \in K[X,Y,Z]$ zwei homogene Polynome vom Grad m und n ohne gemeinsame Komponente mit zugehörigen Kurven $C = V_+(F), D = V_+(G) \subset \mathbb{P}^2_K$. Dann gibt es maximal mn Schnittpunkte von C und D.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 30.3, da jeder Schnittpunkt zumindest mit Schnittmultiplizität 1 in die Summe eingeht. □

Beispiel 6. Wir betrachten die Neilsche Parabel $C = (ZY^2 - X^3)$ und den Kreis mit Mittelpunkt $(1,0,1)$, also $D = V((X-Z)^2 + Y^2 - Z^2)$. Nach dem Satz von Bezout erwarten wir eine Gesamtschnittzahl von 6. Wir berechnen die Schnittpunkte. Für $Z = 0$ folgt aus der ersten Gleichung $X = 0$ und dann aus der zweiten $Y = 0$, so dass es keinen Schnittpunkt auf der projektiven Geraden $V_+(Z)$ gibt. Wir betrachten daher die affinen Gleichungen $Y^2 - X^3 =$

und $(X-1)^2+Y^2-1=$. Wir berechnen die Schnittpunkte, indem wir $Y^2=1-(X-1)^2$ in die erste Gleichung einsetzen. Dies ergibt

$$1-(X-1)^2-X^3=-X^3-X^2+2X=X(-X^2-X+2)=-X(X-1)(X+2)\,.$$

Dies führt zu den Schnittpunkten

$$(0,0),(1,1),(1,-1),(-2,2\sqrt{2}i),(-2,-2\sqrt{2}i)\,.$$

Die beiden letzten Punkte zeigen auch, dass der Satz nur über einem algebraisch abgeschlossenen Körper gilt. Es gibt also nur fünf Schnittpunkte. Da die Neilsche Parabel im Nullpunkt eine Singularität besitzt und dieser ein Schnittpunkt ist, so muss dort die Schnittmultiplizität größer als 1 sein. Um dies zu bestätigen betrachten wir

$$\begin{aligned}&K[X,Y]_{(X,Y)}/(Y^2-X^3,Y^2-1+(X-1)^2)\\&=K[X,Y]_{(X,Y)}/(Y^2-X^3,X(X-1)(X+2))\\&=K[X,Y]_{(X,Y)}/(Y^2-X^3,X)\\&=K[X,Y]_{(X,Y)}/(Y^2,X)\\&=K[Y]/(Y^2)\,.\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Einsetzungsrechnung von oben wiederholt und dann ausgenutzt, dass $X-1$ und $X+2$ Einheiten im lokalen Ring $K[X,Y]_{(X,Y)}$ sind. Die Dimension ist also 2 und damit muss die Schnittmultiplizität an allen anderen Schnittpunkten 1 sein, was man auch direkt bestätigen kann.