

## Algebraische Kurven

### Arbeitsblatt 2

#### Aufwärmaufgaben

AUFGABE 2.1. Betrachte in  $\mathbb{A}_K^3$  die beiden Ebenen

$$E_1 = V(3x + 4y + 5z) \text{ und } E_2 = V(2x - y + 3z).$$

Parametrisiere den Schnitt  $E_1 \cap E_2$ .

AUFGABE 2.2. Zeige, dass zu einem Punkt  $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n$  das zugehörige Ideal

$$(X_1 - a_1, X_2 - a_2, \dots, X_n - a_n)$$

maximal ist.

AUFGABE 2.3. Zeige: Der Durchschnitt von zwei verschiedenen Kreisen in der affinen Ebene ist der Durchschnitt eines Kreises mit einer Geraden.

AUFGABE 2.4. Skizziere die reellen Nullstellengebilde von  $Y^n - X^n$  und bestimme das Verschwindungsideal zu den affin-algebraischen Mengen  $V_n \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ , die aus allen Geraden durch den Nullpunkt und durch die Eckpunkte eines regulären  $n$ -Ecks (mit  $(1, 0)$  als einem Eck) besteht.

AUFGABE 2.5. Bestimme Idealerzeuger für ein Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{R}[X, Y, Z]$ , dessen Nullstellenmenge genau die vier Punkte

$$(2, 3, 4), (1, 1/5, 0), (0, 0, 1), (-1, -2, \sqrt{3}) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$$

sind.

#### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 2.6. (3 Punkte)

Bestimme alle simultanen Lösungen der beiden Gleichungen

$$x^3 + y^2 = 2 \text{ und } 2xy = 3$$

für die Körper  $K = \mathbb{Z}/(3)$ ,  $\mathbb{Z}/(5)$  und  $\mathbb{Z}/(7)$ .

## AUFGABE 2.7. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$x^2 + y^2 + xy = 1$$

für die Körper  $K = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_4$  und  $\mathbb{F}_8$ . Man kann für die Körper diese Darstellungen verwenden.

## AUFGABE 2.8. (3 Punkte)

Berechne die Schnittpunkte der beiden Kurven

$$C = V(x^2 + 2y^2 + 3xy + x - 2) \text{ und } L = V(4x + 3y - 5).$$

## AUFGABE 2.9. (4 Punkte)

Es sei  $S$  das Nullstellengebilde in  $\mathbb{A}_K^3$ , das durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

gegeben ist. Der Schnitt von  $S$  mit einer Ebene  $E$  ist eine Kurve und wird in  $E$  durch eine Gleichung in zwei (geeigneten) Variablen beschrieben. Finde eine solche Gleichung für die Ebenen

$$E_1 = V(x), E_2 = V(z - 1), E_3 = V(x + 2y + 3z), E_4 = V(3x - 2z).$$