Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 31

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 31.1. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass die Einschränkung des Skalarproduktes auf U ebenfalls ein Skalarprodukt ist.

Aufgabe 31.2. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$ und der zugehörigen Norm $||-||$. Zeige, dass die Beziehung

$$\langle v,w\rangle = \frac{1}{2}\left(||\, v+w\,||^2 - ||\, v\,||^2 - ||\, w\,||^2\right)$$

gilt.

Aufgabe 31.3. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$ und der zugehörigen Norm $||-||$. Zeige, dass die sogenannte *Parallelogrammgleichung*

$$||\, v+w\,||^2 + ||\, v-w\,||^2 = 2\, ||\, v\,||^2 + 2\, ||\, w\,||^2$$

gilt.

Aufgabe 31.4. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$. Zeige, dass der zugehörige Abstand die folgenden Eigenschaften besitzt (dabei sind $u,v,w \in V$).

(1) Es ist $d(v,w) \geq 0$.
(2) Es ist $d(v,w) = 0$ genau dann, wenn $v = w$.
(3) Es ist $d(v,w) = d(w,v)$.
(4) Es ist
$$d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)\,.$$

Aufgabe 31.5. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass das orthogonale Komplement ebenfalls ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 31.6. Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von $\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 31.7. Der $\mathbb{R}^3$ sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto 3x + y + 7z,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für U.

Aufgabe 31.8. Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n. Zeige, dass eine Vektorfamilie $u_1, \ldots, u_n \in V$ genau dann eine Orthonormalbasis von V ist, wenn die zugehörige lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V,\ e_i \longmapsto u_i,$$

eine Isometrie zwischen $\mathbb{R}^n$ und V ist.

Aufgabe 31.9. Man gebe ein Beispiel einer bijektiven linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

an, die keine Isometrie ist, für die aber für alle $u, v \in V$ die Beziehung

$$\langle u, v \rangle = 0 \text{ genau dann, wenn } \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = 0$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 31.10. (2 Punkte)

Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Beweise den *Satz des Pythagoras*: Für zwei Vektoren $v, w \in V$, die senkrecht aufeinander stehen, gilt die Beziehung

$$|| v + w ||^2 = || v ||^2 + || w ||^2 \ .$$

Aufgabe 31.11. (4 Punkte)

Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum im $\mathbb{R}^4$.

AUFGABE 31.12. (3 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei $u_1, \ldots, u_n \in V$ eine Orthonormalbasis von V. Zeige, dass für jeden Vektor $v \in V$ die Beziehung

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i$$

gilt.

AUFGABE 31.13. (3 Punkte)

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, an.

AUFGABE 31.14. (4 Punkte)

Der $\mathbb{R}^4$ sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z, w) \longmapsto 4x - 3y + 2z - 5w,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für U.

AUFGABE 31.15. (6 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) φ ist eine Isometrie.
(2) Für jeden Vektor v mit $|| v ||= 1$ ist auch $|| \varphi(v) ||= 1$.
(3) Für jede Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \ldots, n$, ist auch $\varphi(u_i), i = 1, \ldots, n$, eine Orthonormalbasis.
(4) Es gibt eine Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \ldots, n$, derart, dass auch $\varphi(u_i), i = 1, \ldots, n$, eine Orthonormalbasis ist.